Examen partiel de mécanique quantique du 17 mars 2006

Quelques constantes physiques : Masse de l'électron $m_e = 9,1094 \times 10^{-31}$ kg $= 0,51100$ MeV/c^2, charge élémentaire $q = 1,6022 \times 10^{-19}$ C, constante de Planck $h = 6,6261 \times 10^{-34}$ J.s, vitesse de la lumière dans le vide $c = 2,9979 \times 10^8$ m.s^{-1}, $(4\pi\varepsilon_0)^{-1} \simeq 8,9874 \times 10^9$ SI.

Exercice 1 : *Particules virtuelles et portée des forces nucléaires*

Si l'interaction entre deux particules A_1 et A_2 se fait par l'intermédiaire d'une particule B de masse m, le temps Δt entre la création de B par A_1 et la réabsorption de B par A_2 correspond à une "bande d'énergie" de largeur ΔE telle que $\Delta E > mc^2$, énergie de création de la particule B.

a) Montrer que ce temps Δt est limité par une quantité qui dépend de m, c et $\hbar$.

b) Puisque le parcours Δr de cette particule B se fait avec une vitesse limitée par c, en déduire que Δr est borné supérieurement par une distance a fonction de m, c et $\hbar$.

c) En 1935, Yukawa déduisit l'ordre de grandeur de la masse des particules hypothétiques qui médiaient les forces nucléaires, à partir de la portée maximale observée de ces forces (environ 10^{-15} m). Estimer numériquement cette masse en MeV/c^2. Dix ans plus tard, la découverte des mésons π sanctionna cette hypothèse.

Exercice 2 : *Le deuton, état lié d'un proton et d'un neutron*

Le deuton, noyau de deutérium, est le plus simple des noyaux composés. C'est un état lié d'un proton et d'un neutron. L'interaction attractive entre proton et neutron est bien décrite par l'énergie potentielle de Yukawa :

$$V_Y(r) = -\left(\frac{g^2}{r}\right) \mathrm{e}^{-r/a_N}$$

où r est la distance entre les nucléons, g est la constante de couplage des interactions *hadroniques* et a_N, la portée des forces nucléaires (cf exercice précédent).
On considère l'énergie interne du deuton dans le référentiel du centre de masse des particules :

$$E = \frac{p^2}{2M} + V_Y(r)$$

où p est la quantité de mouvement relative du proton et du neutron et M leur masse réduite

$$M = \frac{m_p m_n}{m_p + m_n} \simeq \frac{1}{2} m_N$$

en introduisant la masse nucléonique moyenne $m_N \simeq m_p \simeq m_n$.

a) On fait l'approximation, assez grossière, consistant, dans l'inégalité de Heisenberg, à estimer l'incertitude sur la position par r et celle sur l'impulsion par p. Chercher, dans ces conditions, une expression qui n'est fonction que de r et qui borne inférieurement l'énergie interne du deuton.

b) Montrer que cette expression admet un minimum pour une valeur r_d de r. En déduire une estimation de l'énergie de liaison du deuton en fonction de la *taille* r_d du deuton :

$$E_d = -\frac{\hbar^2}{2Mr_d^2} \frac{a_N - r_d}{a_N + r_d}.$$

c) On donne $a_N \simeq 1,5 \times 10^{-15}$ m. Evaluer numériquement l'ordre de grandeur de E_d si r_d est une fraction de a_N du même ordre de grandeur.

Exercice 3 : *Microscope électronique*

Dans un microscope électronique typique, les électrons ont une énergie cinétique moyenne $E_c \simeq 100$ keV, avec une dispersion $\Delta E \simeq 1$ eV.

a) Comparer l'énergie cinétique moyenne de ces électrons à leur énergie de masse $m_e c^2$. En déduire qu'il s'agit d'électrons relativistes dont on évaluera l'énergie totale E en MeV. On rappelle que la relation relativiste entre énergie totale et impulsion est donnée par $E = (p^2c^2 + m^2c^4)^{1/2}$ et que l'énergie cinétique est déduite de l'énergie totale par $E_c = E - mc^2$.

b) Calculer la longueur d'onde moyenne λ des électrons.

b) Calculer leur dispersion en quantité de mouvement Δp.

c) Calculer leur dispersion en position Δx et la comparer à λ.

Exercice 4 : *Polarisations circulaire et rectiligne*

Dans l'espace à 2 dimensions des états de polarisation du photon, on choisit la base $\{ \,|\rightarrow\rangle, |\uparrow\rangle\, \}$ des états de polarisation linéaire suivant l'horizontale et la verticale.

a) Ecrire, sur cette base, un état de polarisation linéaire dans la direction faisant un angle θ avec l'horizontale.

b) Ecrire la décomposition du même état dans la base des états de polarisation circulaire gauche et droite :

$$|\,\Psi_{G,D}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\rightarrow\rangle \pm i\,|\uparrow\rangle) \quad .$$

c) En déduire la probabilité qu'a un photon de polarisation linéaire d'angle θ d'être transmis par un polariseur qui transmet une polarisation circulaire droite avec une probabilité égale à un.