Université de Nice – Sophia Antipolis
Faculté des Sciences
Licence SM–MP

Examen Mécanique II
partie mécanique du solide

18 Décembre 2009

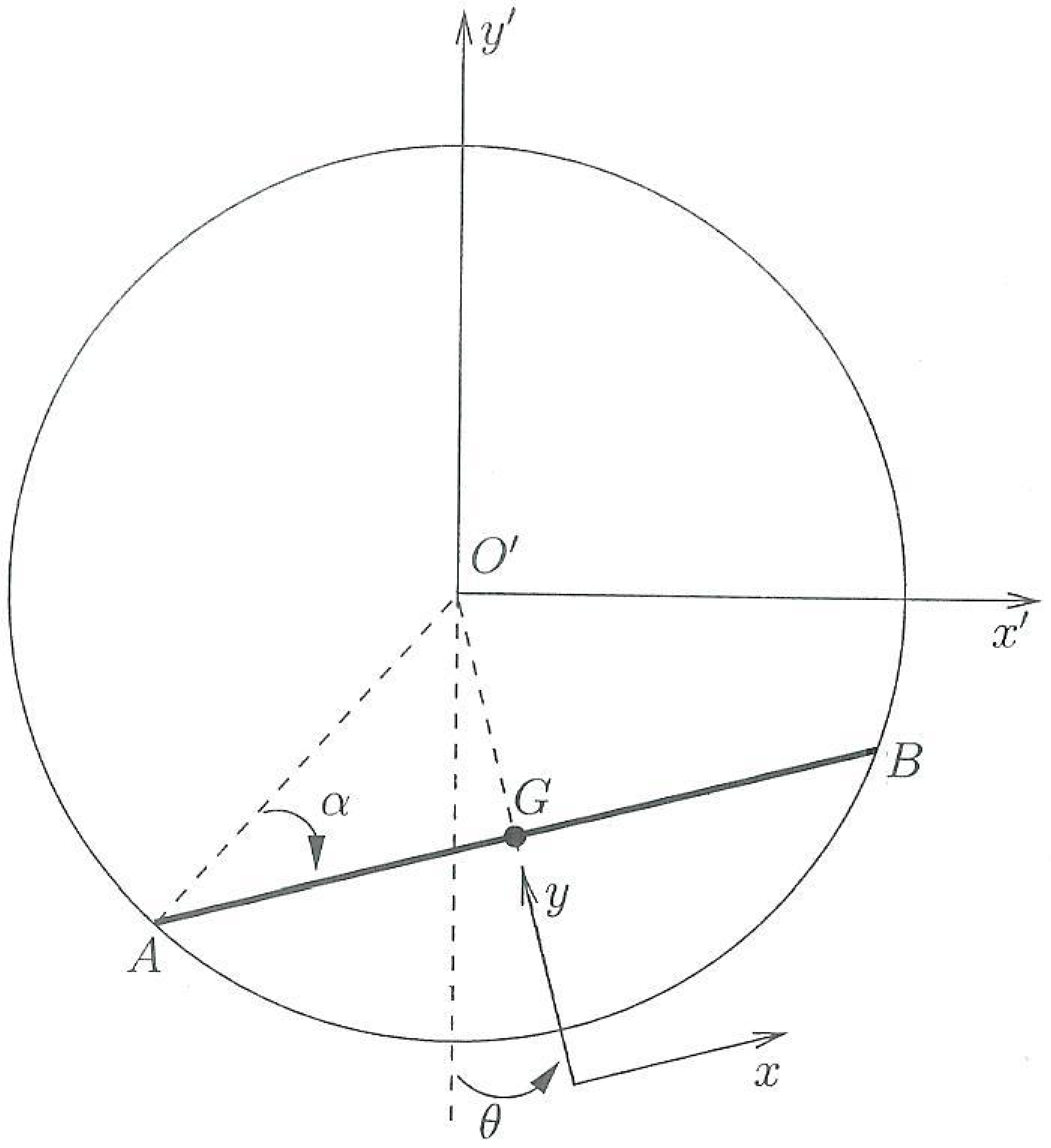
CALCULATRICES ET DOCUMENTS INTERDITS
DURÉE TOTALE: DEUX HEURES TRENTE

Une tige homogène, de densité λ, de longueur $\ell = AB$, de masse m, de centre d'inertie G repose sur la face interne d'une sphère creuse, de centre O' et de rayon R. Il n'y a pas de frottement au niveau des points d'appui A et B. Sous l'effet de l'action de contact et de son poid, la tige effectue de petites oscillations dans le plan $Ox'y'$ et on repère sa position par l'angle θ formé par $O'G$ et la verticale. Le triangle $AO'B$ est isoscèle et l'angle α est indépendant du mouvement puisque ce triangle ne se déforme pas.

Il est demandé de:

1. Écrire le vecteur instantané de rotation $\vec{\omega}$ de la barre.
2. Calculer la vitesse $\vec{v}_G$ du centre de masse de la barre. R, α
3. Calculer le moment d'inertie de la barre par rapport à l'axe Gz (perpendiculaire à la feuille de papier). Utiliser que $\ell = 2R\cos\alpha$.
4. Calculer l'énergie cinétique E_c de la barre.
5. Calculer l'énergie potentielle gravitationnelle $U(\theta)$ de la barre.
6. En utilisant le *Théorème de la conservation de l'énergie mécanique*, calculer l'équation du mouvement du système, qui relie $\ddot{\theta}$ et θ. Si on se restreint à des petites oscillations ($\theta \ll 1$), quelle est la fréquence des oscillations?
7. Dessiner les forces qui agissent sur la barre. Utiliser le *Théorème du moment dynamique* et le *Théorème de la résultante dynamique* pour retrouver les équations du mouvement.

T. S. V. P. ⟶



FORMULAIRE

- Composition des vitesses: $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}$, A, B des points du solide.
- Moments d'inertie: $I_x = \int_S (y^2 + z^2)\, dm$, $I_y = \int_S (x^2 + z^2)\, dm$ et $I_z = \int_S (x^2 + y^2)\, dm$, où S est le solide.
- Premier théorème de König: $\vec{L}_P = M\overrightarrow{PG} \wedge \vec{v}_G + \mathbb{I}_G \cdot \vec{\omega}$ (si P point fixe: $\vec{L}_P = \mathbb{I}_P \cdot \vec{\omega}$).
- Deuxième théorème de König: $E_c = \frac{1}{2}M|\vec{v}_G|^2 + \frac{1}{2}\,\vec{\omega} \cdot \mathbb{I}_G \cdot \vec{\omega}$ (si P point fixe: $E_c = \frac{1}{2}\,\vec{\omega} \cdot \mathbb{I}_P \cdot \vec{\omega}$).
- Théorème du moment dynamique: $d\vec{L}_P/dt = \sum_i \mathcal{M}_P(\vec{F}_i^{ext}) - M\vec{v}_P \wedge \vec{v}_G = \sum_i \overrightarrow{PA_i} \wedge \vec{F}_i^{ext} - M\vec{v}_P \wedge \vec{v}_G$ où A_i est le point d'application de la force extérieure $\vec{F}_i^{ext}$ (si $P = G$ ou P point fixe alors $\vec{v}_P \wedge \vec{v}_G = \vec{0}$).