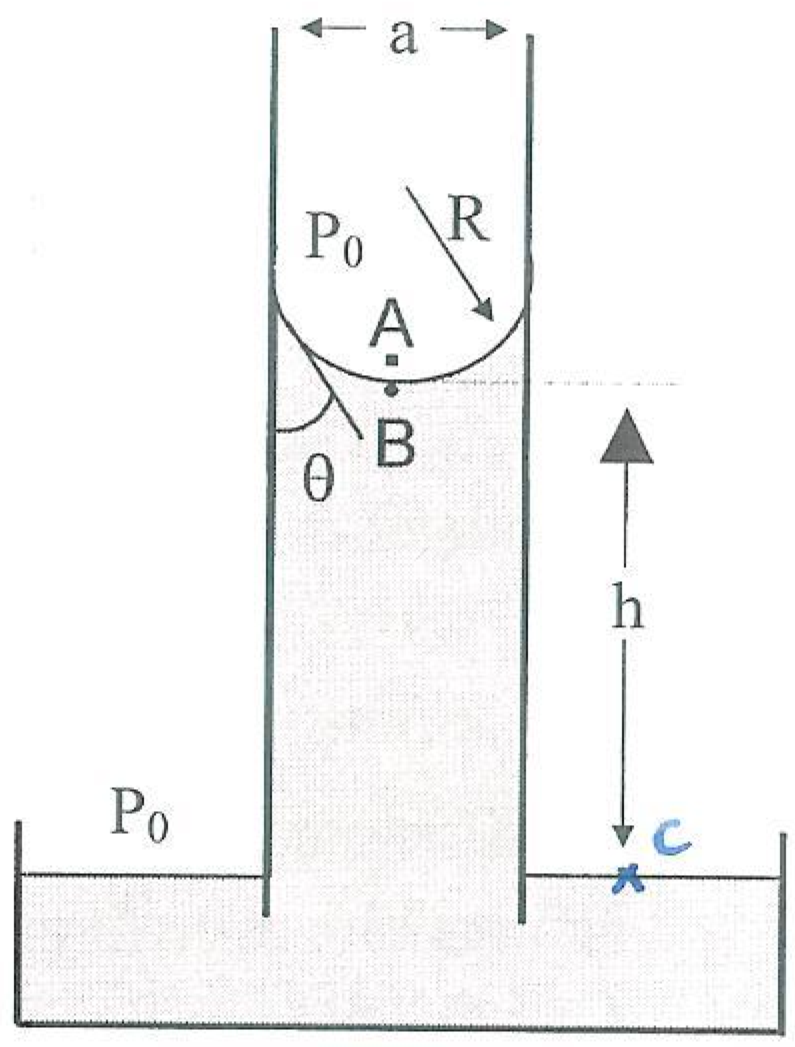
Université de Nice - Sophia Antipolis **Année 2009-2010**

Licence SM-MP 2ème année : HYDRODYNAMIQUE

Epreuve du 18 décembre 2009

Durée conseillée : 1 heures 45
Aucun document n'est autorisé.

Exercice n°1 : ***Ascension capillaire entre deux plaques***



Deux plaques planes sont plongées dans une cuve contenant de l'eau. L'expérience montre que si la distance entre les deux plaques est suffisamment petite (quelques millimètres ou moins), le liquide monte entre les deux plaques au-dessus du niveau dans la cuve : c'est le phénomène d'ascension capillaire. On cherche à établir la dépendance de la hauteur h d'ascension en fonction des paramètres du problème : tension superficielle γ du liquide, distance a entre les plaques .

On considère le cas où les deux plaques sont parallèles, distantes de a. On remarque que la surface libre entre le liquide entre les deux plaques et l'air est courbe, et on suppose que c'est un cylindre de rayon R et d'axe horizontal et parallèle aux plaques. L'air au-dessus du liquide est à la pression P_o.

1) Trouver la pression au point B en fonction de P_o à partir de la loi de l'hydrostatique.

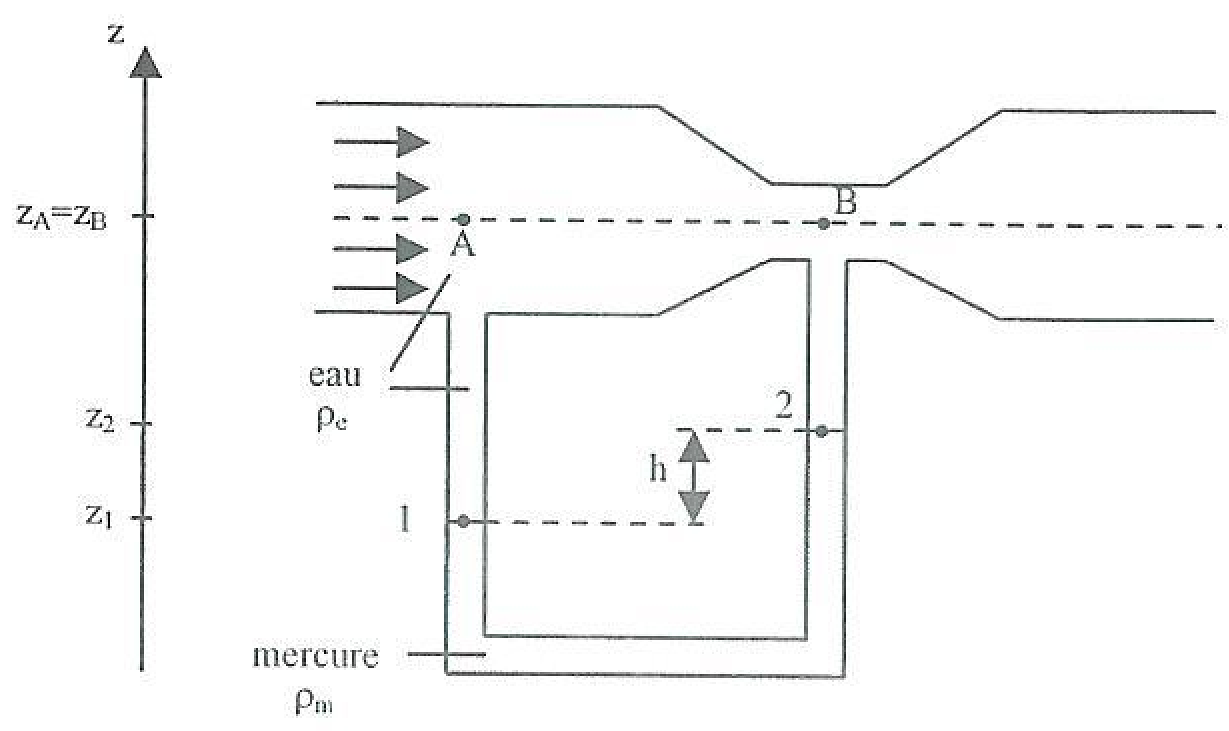
2) Donner la différence de pression entre deux points A et B situés juste de part et d'autre de l'interface liquide-air entre les plaques, en fonction de γ et R.

3) Déduire des questions 1) et 2) la hauteur d'ascension h en fonction de γ, R et ρ, masse volumique du liquide.

4) En trouvant la relation entre la distance a entre les plaques, le rayon R du cylindre et l'angle θ de raccordement de l'interface sur les plaques, e xprimer finalement h en fonction de γ, a, θ et ρ. Calculer h pour l'eau pure ($\gamma=7.10^{-2}$N/m, $\rho=10^3$kg/m^3) et des plaques de verre ($\theta=50°$) distantes de a=1mm.

(Loi de Laplace : $\Delta p = \gamma(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2})$ où R_1 et R_2 sont les rayons de courbure de l'interface)

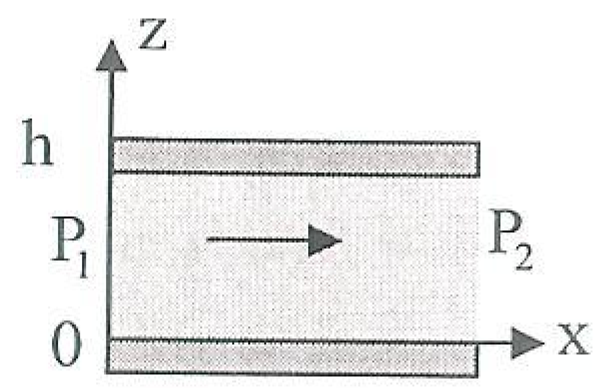
Exercice 2 : ***Tube de Venturi***



Un tube horizontal de section S_A, présente un rétrécissement dans sa partie centrale de section S_B ($S_B < S_A$). Un liquide incompressible (eau) de densité ρ_e et de viscosité négligeable s'écoule dans le tube avec un débit volumique Q constant. On supposera que la vitesse du fluide est constante sur une section du tube et parallèle à l'axe du tube. Soient P_A, P_B, V_A et V_B les pressions et les vitesses du fluide aux points A et B. Au niveau des points A et B, est branché un manomètre différentiel à tube en U à mercure. Il n'y a pas d'écoulement dans le tube en U.

1) Donner la relation entre P_1 et P_A , entre P_2 et P_B et entre P_1 et P_2. En déduire une relation entre la différence de pression $\Delta P = P_A - P_B$ et la hauteur de mercure h.
2) Exprimer le débit Q en fonction de la vitesse V_A du fluide au point A et donner la relation entre V_A et V_B à partir du principe de conservation de la masse.
3) En utilisant la relation de Bernoulli le long de la ligne de courant passant par A et B, trouver une relation entre V_A et V_B. En déduire l'expression de V_A en fonction de ΔP.
4) Pour $S_B \ll S_A$, calculer Q en fonction de ΔP.
Application numérique : $S_B = 0{,}6\ cm^2$, $\rho_e = 10^3\ kg/m^3$, $\rho_m = 13{,}6\ 10^3\ kg/m^3$, $h = 1{,}5\ cm$.

Exercice 3 : ***Ecoulement de Poiseuille plan***



Exercice2 (sur 5 points) : ***Ecoulement de Poiseuille plan***

Un fluide newtonien incompressible s'écoule entre deux plans immobiles, parallèles au plan xOy et séparés par une hauteur h. La largeur l (suivant y) et la longueur L (suivant x) des deux plans étant très grandes par rapport à h, on considère qu'ils sont infinis. On impose un gradient de pression suivant x : $\frac{dP}{dx} = -\frac{\Delta P}{L}$ où $\Delta P = P_1 - P_2 > 0$ est la différence de pression entre l'entrée et la sortie des plans. On cherche une solution stationnaire de la forme $\vec{V} = V(x,z)\hat{x}$ correspondant à un écoulement unidirectionnel.
On néglige les effets de la pesanteur dans tout le problème.

1) En utilisant l'équation de conservation de la masse, simplifier la forme de $\vec{V}$.
2) Enoncer les conditions aux limites pour le champ de vitesse.
3) A partir de l'équation de Navier-Stokes, trouver la solution $\vec{V}$, P du problème. Représenter le profil de vitesse.
4) Calculer le débit Q du fluide en fonction de ΔP , L, l, h et η la viscosité du fluide.

(Equation de Navier-Stokes : $\rho(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v}) = -\vec{\nabla}P + \eta\Delta\vec{v} + \rho\vec{g}$)