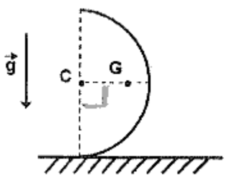
Université de Nice Sophia Antipolis
Année 2007-2008

L2-SM et L2-MP
Mécanique II- 2$^{\text{ème}}$ session

Examen de mécanique du solide du 13 juin 2008 (durée : 1h30)

Documents interdits

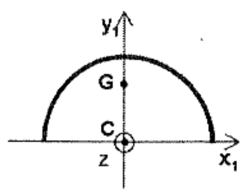
Demi cylindre lâché sur un plan rugueux



On lâche un demi cylindre creux soumis à son seul poids et qui repose initialement le long de son diamètre. On veut savoir quelle est la valeur minimale du coefficient de frottement μ pour que le cylindre roule sans glisser dès le début.

Partie A : Éléments d'inertie du solide

Le demi cylindre a une surface homogène, un rayon a, une longueur l et une masse m.

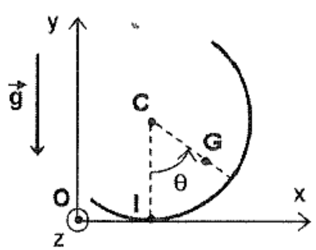


1) Calculer dans $C_{x_1y_1z}$ les coordonnées du centre d'inertie G du demi cylindre. Par la suite on notera b la distance CG.

2) Montrer que la matrice d'inertie du demi cylindre dans $G_{x_1y_1z}$ sera de la forme $I_{\frac{1}{2}cylindre} = \begin{bmatrix} I_{Gx_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Gy_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Gz} \end{bmatrix}$

3) Calculer le moment d'inertie I_{Cz} par rapport à l'axe C_z puis en déduire le moment d'inertie I_{Gz} par rapport à l'axe G_z.

Partie B : Étude dynamique et énergétique du mouvement



Pour résoudre la question initiale, on commence par étudier le mouvement à un temps t quelconque et on fait l'hypothèse d'un roulement sans glissement.
La position du solide est déterminée par l'abscisse x du point C et par l'angle $\theta = (\vec{CI}, \vec{CG})$.

A $t = 0$ on a $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0, \theta(0) = \frac{\pi}{2}, \dot{\theta}(0) = 0$

1) Donner le vecteur instantané de rotation de ce mouvement. Écrire la condition de roulement sans glissement et en déduire la relation entre x et θ.

2) Donner les coordonnées x_G et y_G du centre d'inertie G dans O_{xyz} en fonction de a, b et θ.

En déduire que l'accélération $\vec{a}_G = \begin{pmatrix} (b\cos\theta - a)\ddot{\theta} - b\dot{\theta}^2\sin\theta \\ b\ddot{\theta}\sin\theta + b\dot{\theta}^2\cos\theta \end{pmatrix}$ dans O_{xyz}.

3) Représenter les 3 forces extérieures $\vec{N}$, $\vec{f}$ et $m\vec{g}$ agissant sur le solide.
Écrire et projeter le théorème de la résultante dynamique.

4) Donner le moment cinétique $\vec{\sigma}_G$ du demi cylindre en son centre d'inertie G

5) Montrer que l'énergie cinétique du cylindre s'écrit $E_C = ma\dot{\theta}^2(a - b\cos\theta)$.

Partie C : Résolution de la question initiale

1) On admettra qu'on peut déduire du théorème de l'énergie mécanique l'équation $0 = gb\sin\theta + 2a\ddot{\theta}(a - b\cos\theta) + ab\dot{\theta}^2\sin\theta$.

Montrer qu'à l'instant $t = 0$, on obtient le système suivant de 3 équations (à 3 inconnues N, f et $\ddot{\theta}_0 = \ddot{\theta}(0)$).

$$\begin{cases} f = -ma\ddot{\theta}_0 \\ N - mg = mb\ddot{\theta}_0 \\ 0 = gb + 2a^2\ddot{\theta}_0 \end{cases}$$

2) Expliquer pourquoi on doit avoir $\mu > \mu_C = \frac{f}{N}$ pour ne pas avoir de glissement.

Calculer μ_C à l'instant initial et donner sa valeur numérique.