UNIVERSITE DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS
L2-SM et L2-MP 10 décembre 2007
Électromagnétisme (durée 3h)
Documents interdits à l'exception du formulaire. Préciser SMC, SMP ou MP sur la copie.
Lire le sujet en entier avant de commencer.

I- Solénoïde

Partie 1- Théorème d'Ampère (SMC/SMP/MP) 7,5 points

Dans une région de l'espace où existe un champ $\vec{B}$ et des courants i, on trace un circuit fermé (C) sur lequel s'appuie une surface (S).

1.1- Rappeler le théorème d'Ampère appliqué au circuit (C). Préciser les quantités qu'il faut être capable de calculer pour appliquer ce théorème.

1.2- Soit un solénoïde à spires jointives, d'axe Oz, de longueur infinie et de rayon R; il possède n spires par unité de longueur et il est parcouru par un courant continu d'intensité I. Utilisez les critères de symétrie pour donner des informations sur le champ magnétique:

i) sur l'axe Oz, ii)hors de l'axe Oz à l'intérieur du solénoïde, iii) à l'extérieur du solénoïde

1.3- Utilisez les règles d'orientation pour déterminer (schéma) le sens de $\vec{B}$ sur l'axe Oz.

1.4- Soit, à l'intérieur du solénoïde, le circuit rectangulaire fermé $A_1B_1C_1D_1$ où A_1B_1 est sur Oz et C_1D_1 à la distance ρ de l'axe Oz. On appelle respectivement $\vec{B}$ et $\vec{B}(\rho)$ le champ magnétique sur Oz et à la distance ρ de l'axe Oz. Appliquez le théorème d'Ampère à ce circuit et conclure sur la nature du champ magnétique à l'intérieur du solénoïde.

1.5- Soit, à l'extérieur du solénoïde, le circuit rectangulaire fermé $A_2B_2C_2D_2$ où A_2B_2 est parallèle et à la distance ρ de l'axe Oz et C_2D_2 est très loin de l'axe Oz. On appelle respectivement $\vec{B}(\rho)$ et $\vec{B}(\infty)$ le champ magnétique sur A_2B_2 et C_2D_2. Appliquez le théorème d'Ampère à ce circuit et conclure sur la valeur du champ magnétique à l'extérieur du solénoïde.

1.6- Soit le circuit rectangulaire fermé $A_3B_3C_3D_3$ où A_3B_3 est parallèle à Oz à l'intérieur du solénoïde et C_3D_3 est à l'extérieur du solénoïde. Appliquez le théorème d'Ampère à ce circuit pour montrer que le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde s'écrit: $\vec{B} = \mu_0 n I\, \hat{z}$.

Partie 2- Potentiel vecteur (SMP/MP) 3 points

2.1- En tout point de l'espace où se trouve le solénoïde il existe un potentiel vecteur $\vec{A}$ associé à $\vec{B}$ par $\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$. Etant donnée la symétrie du problème ($\vec{A}$ est un vrai vecteur), montrer que $\vec{A} = A_\theta \hat{\theta}$. Compte-tenu de l'orientation de $\vec{B}$ quelle est, en coordonnées cylindriques, la seule composante de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$ non nulle ? Enfin A_θ est-elle fonction de ρ ? de θ ? de z ?

En déduire comment s'écrit $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$ en coordonnées cylindriques; c'est une équation différentielle qui relie A_θ à la valeur de B du point considéré.

2.2- Intégrer l'équation différentielle précédente à l'intérieur du solénoïde. En déduire l'expression du potentiel vecteur (on donne $\vec{A} = \vec{0}$ pour ρ=0).

2.3- Même question que 2.2 mais à l'extérieur du solénoïde ($\vec{A}$ est continu à la traversée du solénoïde).

2.4- Tracer sur 2 graphes superposés A et B en fonction de ρ.

Partie 3 - Phénomènes dépendant du temps (SMP/MP) 3 points

Le courant I est maintenant sinusoïdal de forme: $I = I_0 \sin\omega t$.

3.1- Ecrire l'équation de Maxwell-Faraday et expliquer ce qu'elle signifie dans le contexte de ce problème.

3.2- Utiliser la définition de $\vec{A}$ dans l'équation de Maxwell-Faraday pour établir une équation qui, en l'absence de charges statiques, relie $\vec{E}$ et $\vec{A}$.

3.3- Connaissant $\vec{A}$ en fonction de I tel qu'il a été établi dans la partie 2, en déduire $\vec{E}$ à l'intérieur et à l'extérieur du solénoïde.

3.4- Soit une spire (C) de rayon αR (α>1) et d'axe Oz qui entoure le solénoïde. Calculer la circulation de $\vec{E}$ le long de cette spire et montrer qu'elle est égale à $-\frac{d\phi}{dt}$ où ϕ représente le flux de $\vec{B}$ à travers la surface de la spire.

II- Cable coaxial (SMC/SMP/MP) 6,5 points

Un cable coaxial, du type utilisé pour les descentes d'antenne de télévision, est constitué par 2 conducteurs métalliques cylindriques de rayon a et b (a<b) et de hauteur h (h>> a et b) entre lesquels on a placé un matériau de faible conductivité γ. Le conducteur central est porté au potentiel V_1 et le conducteur extérieur au potentiel V_0 (V_1>V_0).

1- Quelle est la symétrie du problème ? Comment le champ électrique est-il orienté dans le matériau faiblement conducteur et quelle est la forme des équipotentielles ?

2- On observe dans le système un courant de fuite I entre les deux conducteurs cylindriques. Quelle est la densité de courant $\vec{j}(r)$? En déduire le champ électrique $\vec{E}(r)$?

3- Calculer alors V_1-V_0 en fonction de I, γ, h, a et b. En déduire la résistance de fuite R d'une longueur h de cable. A b fixé, comment doit-être a pour que cette résistance soit la plus grande possible ?

4- Expliciter j(a), densité de courant au voisinage du conducteur central en fonction de γ, V_1,V_0, a et b et calculer a pour que cette densité de courant soit minimale.

III- Spire et champ magnétique terrestre (SMC) 6 points

1- Soit une spire circulaire de rayon R parcourue par le courant d'intensité I, utilisez les critères de symétrie pour trouver l'orientation du champ magnétique au centre de la spire.

2- A l'aide de la loi de Biot et Savart, montrer que le module de ce champ est $B = \frac{\mu_0 I}{2R}$.

3- On dispose la spire dans un plan méridien à la surface de la Terre et on place une boussole au centre de la spire. Pour I=0, la boussole pointe le nord, ce qui signifie qu'elle est parallèle au plan méridien et au plan de la spire. Connaissant la composante horizontale B_T du champ magnétique terrestre, de quel angle α tourne la boussole quand un courant d'intensité I parcourt la bobine ?

4- A.N. $B_T = 2.10^{-5}$T ; $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H/m ; $R = \pi/10$ m ; calculer I pour que α = 45°.

* * * * * * * * * * * * * *