Richard MONIER - Correction.

UNIVERSITE DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS
L2-SM et L2-MP 30 octobre 2007
Électromagnétisme (durée 2h30)
Documents interdits à l'exception du formulaire.
Lire le sujet en entier avant de commencer.

I- Théorème de Stokes

Soit, en cartésiennes, le champ de vecteurs $\vec{A} = 2y\hat{x} + 3x\hat{y} - z^2\hat{z}$.

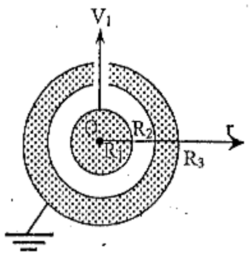
1- Calculer $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$.

2- Soit la surface ouverte constituée par la demi-sphère de centre O et de rayon R avec z>0. Calculer le flux de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$ à travers cette demi-sphère.

3- Calculer la circulation de $\vec{A}$ sur le circuit fermé constitué par le cercle de centre O et de rayon R du plan xOy. Le Théorème de Stokes est-il vérifié ?

On rappelle la relation: $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

II- Condensateur sphérique



Soit un condensateur sphérique constitué par une sphère métallique pleine de centre O et de rayon R_1 entourée par une coquille sphérique métallique de rayon intérieur R_2 et de rayon extérieur R_3 ($R_1<R_2<R_3$). La sphère intérieure est portée au potentiel $V_1>0$ et constant tandis que la coquille est reliée à la Terre. Les charges portées par les surfaces de rayons R_1, R_2 et R_3 sont respectivement appelées q_1, q_2 et q_3 .
Le potentiel est nul à l'infini.

1- Exprimer le champ électrique (direction, sens, module) et le potentiel pour $R_1 < r < R_2$.

2- A l'aide de la formule de V précédente, exprimer $V = V_1$ pour $r = R_1$ et $V = V_2 = 0$ pour $r = R_2$. En déduire $V_1 - V_2$ et la capacité C du condensateur sphérique.

3- Déterminer q_2 et q_3.

4- Exprimer le champ électrique et le potentiel dans tout l'espace. Tracer les graphes E(r) et V(r).

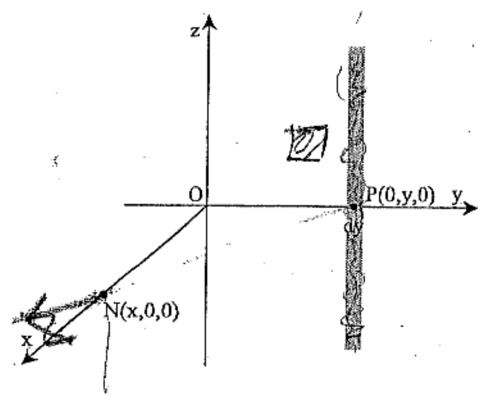
III- Fil, plan et condensateur plan

1- On considère en cartésiennes un fil infini porté par l'axe Oz et chargé avec la densité linéique de charge $\lambda = \frac{dq}{dz} > 0$. On s'intéresse au champ électrique qu'il crée en un point M(ρ, θ, z) repéré en coordonnées cylindriques. En utilisant les éléments de symétrie et le théorème de Gauss, déterminer la direction, le sens et le module du champ électrique en M.

2- Le fil étant retiré, on considère maintenant le plan yOz chargé avec la densité surfacique de charge $\sigma = \frac{dq}{ds} > 0$. On s'intéresse au champ électrique qu'il crée au point N(x,0,0) de l'axe Ox.

2.1- En utilisant les éléments de symétrie, déterminer la direction et le sens du champ électrique en N.

2.2- On décompose le plan yOz en bandes de longueur infinie, parallèles à l'axe Oz et de largeur dy. Soit l'une de ces bandes passant par le point P(0,y,0) de l'axe Oy. On veut utiliser le résultat de la question 1; déterminer la relation qui lie λ, σ et dy de telle sorte que la bande chargée soit équivalente au fil chargé.



2.3- La bande qui passe en P crée en N un champ électrique élémentaire $d\vec{E}$ que vous calculerez en appliquant la formule du champ créé par un fil chargé.

2.4- En intégrant sur tout le plan le champ crée par la bande chargée passant par P, en déduire que le champ électrique en N, créé par le plan chargé est $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{x}$ pour x>0 et $\vec{E} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{x}$ pour x<0.
Attention: i) les éléments de symétrie font que seule une composante du champ créé par la bande est à considérer. ii) pour intégrer, on conseille d'utiliser la variable $\alpha = (\overline{NO}, \overline{NP})$.

3- On considère maintenant deux plans parallèles à yOz: l'un situé en x=-a/2 portant la densité surfacique +σ et l'autre situé en x=+a/2 portant la densité surfacique -σ .

3.1- Calculer le champ électrique résultant dans l'espace situé entre les deux plans.

3.2- On limite en surface les deux plans en les transformant en deux grands disques de rayon R et d'axe Ox. On admet que cette opération ne modifie pas la structure du champ entre les disques (-a/2<x<+a/2). On donne le potentiel $V=V_0$ en x=+a/2; calculer la valeur du potentiel en x=-a/2.

3.3- Calculer la charge du disque situé en x=-a/2. En déduire la capacité du condensateur constitué par les deux disques.

N.B. La question 3 peut se faire indépendamment des deux autres.

* * * * * * * * * * * * * * *

$$\overrightarrow{dE} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{PN}\,\overrightarrow{e_{PN}}$$

$$dE_x \rightarrow E_x = \int dE_x$$