L2 MP2 Electromag. 2 - Année 2008-2009

Interro Ecrite du Jeudi 30 Avril 2009

Cours : Equation de Helmholtz

1- Ecrire sous leur formes locales les équations de Maxwell pour un milieu contenant des charges $\rho d\tau$ et des courants volumiques $\vec{j}d\tau$.
2- Que deviennent ces équations dans le vide, en l'absence de charges et de courants ?
3- Etablir l'équation d'évolution spatio-temporelle (équation de Helmholtz différentielle aux dérivées secondes) de $\vec{E}$ dans ce milieu.
4- Montrer qu'une onde décrite par $E_x = E_0 \exp j(kz - \omega t)$, $E_y = E_z = 0$ est solution de cette équation si k et ω vérifient une relation que vous établirez (relation de dispersion).

Exercice 1 :Etat de polarisation

Donner la direction de propagation et décrire l'état de polarisation de l'onde suivante en justifiant votre réponse :
$E_x = jA \exp j(\omega t - kz)$, $E_y = A \exp j(\omega t - kz)$
où j vérifie $j^2 = -1$ et A est une amplitude réelle.
Tracer la trajectoire décrite par le vecteur $\vec{E}$ au cours d'une période T en un point M judicieusement choisi.

Exercice 2 : Condensateur plan et A.R.Q.S

Les armatures d'un condensateur plan sont deux disques circulaires de rayons R et d'axe Oz, situées respectivement en $z = -h$ et $z = +h$. L'espace séparant les deux armatures est vide et on négligera les effets de bords. Dans tout le condensateur, le champ électrique y régnant est uniforme et est donné par une loi $\vec{E}(M,t) = E(t)\vec{e}_z$. Le condensateur se décharge à travers un circuit extérieur selon la loi :

$$E(t) = E_0 \exp -(\frac{t}{\tau})$$

où E_0 et τ sont deux constantes réelles positives.
1- a) Ecrire l'équation de Maxwell montrant que ce champ électrique est alors la source d'un champ magnétique $\vec{B}(M,t)$ en tout point M à l'intérieur du condensateur.
1- b) Déterminer la direction et les dépendances de ce champ en coordonnées cylindriques ρ, θ, z.
1- c) Déterminer l'expression du module de $\vec{B}$ en fonction de E, ρ, c et τ en appliquant le théorème d'Ampère sur un contour circulaire judicieusement choisi (faire un schéma !).
2-a) Donner, sans les justifier, l'expression des densités d'énergie electrique, notée u_e et magnétique, notée u_m, en un point M dans le condensateur.
2-b) Exprimer le rapport $\alpha = \frac{u_m}{u_e}$ en fonction de ρ et de la quantité $\lambda = c\tau$.
3-a) Le critère de validité de l'A.R.Q.S revient à dire que l'évolution temporelle de la source sur le temps caractéristique τ doit être suffisamment lente, c'est-à-dire que le temps τ doit

être grand devant le temps caractéristique de propagation des champs dans le condensateur, c'est-à-dire $\frac{\rho}{c}$: $\tau > \frac{\rho}{c}$.

Montrer que ceci revient à négliger la contribution magnétique u_m à l'énergie du système.

3-b) Application numérique : on donne $\tau = 3 \times 10^{-7}$ s et $R = 5$ cm. Vérifier que le critère de l'A.R.Q.S est bien vérifié.

4- Rappeler la définition du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$. Etablir son expression en fonction de E, ρ et τ en un point quelconque à l'intérieur du condensateur. Préciser son sens et sa direction.

5- a) Calculer le flux Φ de $\vec{\Pi}$ à travers un cylindre de rayon R et de hauteur $2h$ selon Oz délimitant le volume entier du condensateur. L'exprimer en fonction de E, τ et le volume V du cylindre.

5-b) Exprimer W l'énergie électromagnétique totale dans le condensateur. Calculer sa variation temporelle $\frac{\partial W}{\partial t}$. Comparer Φ à $\frac{\partial W}{\partial t}$ et commenter le résultat.