L2 Analyse, Janvier 2006

CALCULATRICES ET DOCUMENTS SONT INTERDITS

Exercice 1 – Étudier la convergence des séries numériques :

$$\text{a)}\ \sum \frac{2+n+n^2}{n^4+6n+1} \quad , \quad \text{b)}\ \sum \frac{17-n}{n\sqrt{n}+2}$$

$$\text{c)}\ \sum (n^2+1)\frac{1}{3^n} \quad .$$

Exercice 2 – 1) Montrer que la série de fonctions :

$$\sum \frac{\cos(nx)}{n!}$$

est normalement convergente sur $\mathbf{R}$.
2) Montrer que la fonction :

$$g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \quad , \quad x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n!}$$

est définie et continue sur $\mathbf{R}$.
3) Montrer que la fonction g est dérivable sur $\mathbf{R}$.
4) Calculer $g'(0)$ et montrer que g admet un maximum sur $\mathbf{R}$ que l'on déterminera.

Exercice 3 – 1) Donner la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle :

$$h(x) = \frac{x}{(x+1)(x-4)} \quad .$$

En déduire une primitive de la fonction h.
2) Montrer que la suite de fonctions :

$$h_n(x) = \frac{x(1-e^{-nx})}{(x+1)(x-4)}$$

converge simplement vers la fonction h pour $x \in [0,4[$.
3) Montrer que h_n converge uniformément vers h sur l'intervalle $[1,3]$.
4) Calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^3 \frac{t(1-e^{-nt})}{(t+1)(t-4)}dt \quad .$$

Exercice 4 – Étudier la nature des intégrales suivantes :

$$\text{a)} \int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{t^2+t}dt \quad , \quad \text{b)} \int_0^1 \frac{\sin(\sqrt{t})}{t^2+t}$$

$$\text{c)} \int_1^{+\infty} \frac{\sin(\sqrt{t})}{t^2+t}dt \quad .$$

Exercice 5 – On rappelle pour éviter les étourderies que si f est une fonction 2π-périodique intégrable sur tout intervalle borné, ses coefficients de Fourier sont :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt, \text{ et si } n \geq 1,\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt, b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt\ .$$

Soit f la fonction 2π-périodique définie par :

$$f(x) = 0 \text{ si } x \in [0,\pi[\quad \text{et} \quad f(x) = 1 \text{ si } x \in [\pi, 2\pi[$$

1) Énoncer le théorème de Dirichlet.
2) Représenter le graphe de f sur l'intervalle $[-2\pi, 4\pi]$.
3) Déterminer $S(f)$ la série de Fourier de f.
4) Déterminer en fonction de $x \in \mathbf{R}$, la somme de la série de Fourier de f en x.
4) Déterminer :

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{2k+1} \quad .$$

5) Calculer à l'aide de l'identité de Parseval la somme :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \quad .$$