Examen

6 juin 2012 – durée : 3h00

Mécanique quantique et relativité

1. En 1905, Einstein, développant les bases de la mécanique quantique posées quelques années auparavant par Planck, associe à une onde lumineuse de fréquence ν des quanta d'énergie $E = h\nu$, h étant la constante introduite par Planck. En 1917, il attribue une impulsion à ces quanta rebaptisés photons, complétant ainsi le caractère corpusculaire de ces « grains de lumière ». La vitesse du photons étant égale à c, montrez que le module de son impulsion et son énergie sont reliés par $E = cp$ et que sa masse est nulle.

2. La formule de Planck $E = h\nu$ peut être postulée à partie de la relativité restreinte. Rappelons au préalable qu'une onde électromagnétique de fréquence ν se propageant selon l'axe Ox d'un référentiel $(\mathcal{R})$ est mesurée à une fréquence ν' différente par un observateur lié à un référentiel $(\mathcal{R}')$ se déplaçant à la vitesse $\vec{V} = \beta c\hat{x}$ par rapport à $(\mathcal{R})$: c'est l'effet Doppler relativiste, qui s'écrit

$$\nu' = \nu\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \tag{1}$$

a. En supposant inconnue la formule de Planck $E = h\nu$, montrez que les énergies du photon dans $(\mathcal{R})$ et dans $(\mathcal{R}')$ obéissent à la relation

$$E' = E\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \tag{2}$$

b. En déduire que la formule de Planck est une loi valable en relativité.

3. En 1924, Louis de Broglie étend la formule de Planck aux particules matérielles — dans sa « mécanique ondulatoire », les photons possèdent une masse infiniment petite. À toute particule de masse m et d'énergie E il associe une onde de fréquence ν définie par $E = h\nu$; on utilise plus souvent la pulsation $\omega = 2\pi\nu$: $E = \hbar\omega$, et de même le vecteur d'onde à la place de l'impulsion : $\vec{p} = \hbar\vec{k}$.

a. Montrez que la vitesse de phase v_φ (rappel : $v_\varphi = \omega/k$) de l'onde de matière est donnée par :

$$v_\varphi = c\left[1 + \left(\frac{mc}{p}\right)^2\right]^{1/2} \tag{3}$$

b. Montrez que la vitesse de groupe v_g (rappel : $v_g = \partial\omega/\partial k$) de l'onde de matière est donnée par :

$$v_g = c\left[1 + \left(\frac{mc}{p}\right)^2\right]^{-1/2} \tag{4}$$

c. La vitesse de groupe s'identifiant à la vitesse de la particule, montrez qu'alors $v_\varphi > c$. Est-ce compatible avec la relativité ?

d. Montrez que si l'on souhaite écrire la relation entre impulsion et vitesse d'une particule matérielle sous la forme $p = Iv$, où I est un facteur d'inertie, alors on obtient

$$I = \frac{m}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{5}$$

Commentez ce résultat.

Photo-production de mésons D

Rappels :
- masse de l'électron, $m_e \simeq 0.511\,\mathrm{MeV}/c^2$;
- masse du proton, $m_p \simeq 940\,\mathrm{MeV}/c^2$;
- masse du méson D^0 , $m_{D^0} = m_{\overline{D}^0} \simeq 1864$ Mev/c^2

La réaction de production d'un méson charmé D^0 et de son antiparticule $\overline{D}^0$

$$\gamma + p \longrightarrow p + D^0 + \overline{D}^0 \tag{1}$$

possède un seuil de réaction assez élevée, qui nécessite des photons de haute énergie. La première partie du problème aborde l'aspect de la production de photons énergétiques ; la seconde la production de méson via la réaction (1).

A. Production de photons de grande énergie

On considère un faisceau d'électrons d'énergie $E = 30\,\mathrm{GeV}$ dans le référentiel $(\mathcal{R})$ du laboratoire.

1. Sans faire le moindre calcul, que pouvez-vous dire sur l'état cinématique des électrons : sont-ils non relativistes, relativistes ou ultra-relativiste ? Dans $(\mathcal{R})$, la vitesse du faisceau (égale à la vitesse individuelle des électrons) est v ; $\beta = v/c$ et $\gamma = [1-\beta^2]^{-1/2}$. Montrez que $\beta \simeq 1 - \varepsilon$, avec $\varepsilon \sim 10^{-10}$ (estimez plus précisément ε). En déduire que $\gamma \simeq \beta\gamma \simeq 1/\sqrt{2\varepsilon}$; donnez sa valeur numérique.

2. Un faisceau laser, dont l'énergie individuelle des photons est 4.68 eV, est dirigé sur un faisceau d'électrons d'énergie E. Représentez schématiquement la situation dans $(\mathcal{R})$. Donnez l'expression du quadrivecteur $\underline{k}$ associé au photon.

3. On note $(\mathcal{R}')$ le référentiel dans lequel l'électron est immobile. Définissez dans ce référentiel les quadrivecteurs $\underline{p}'$ et $\underline{k}'$ associés respectivement à l'électron et au photon.

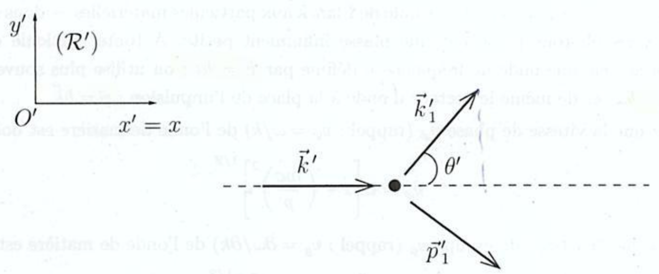

FIGURE 1 – Collision électron-photon vue dans le référentiel $(\mathcal{R}')$ lié à l'électron.

4. Comme le montre la figure 1, dans $(\mathcal{R}')$ la collision électron-photon est du type « diffusion Compton ». Après collision, on note $\underline{p}'_1$ et $\underline{k}'_1$ les quadrivecteurs respectifs de l'électron et du photon (dont l'impulsion fait un angle θ' avec l'horizontale). Établissez l'expression de k'_1 en fonction de k' et de θ'.

5. Exprimez dans $(\mathcal{R})$ le quadrivecteur $\underline{k}_1$ associé au photon diffusé. Calculez les valeurs numériques pour $\theta' = \pm\pi/2$ et $\theta' = \pi$. Quelle est l'énergie individuelle des photons du faisceau après collisions ?

B. Production de D^0

Dans le référentiel $(\mathcal{R})$ du laboratoire, un photon d'énergie $E_1 = 20\,\mathrm{GeV}$ se dirige suivant l'axe des x vers un proton immobile.

1. Dans $(\mathcal{R})$, exprimez les quadrivecteurs $\underline{p}_1$ et $\underline{p}_2$ associés respectivement au photon et au proton avant la réaction.

2. Le référentiel du centre de masse de ces deux particules $(\mathcal{R}^*)$ se déplace dans le laboratoire à la vitesse v^*. En exploitant la propriété du référentiel du centre de masse, calculez v^*.

3. Dans $(\mathcal{R}^*)$, quelle est l'énergie totale $(E^*_{tot} = E^*_1 + E^*_2)$ disponible ?

4. On se place au seuil de la réaction

a. Quel est, dans le référentiel du centre de masse, l'état cinématique du proton et des mésons produits ? En déduire l'énergie minimale du photon pour que la réaction ait lieu.

b. Dans $(\mathcal{R})$, calculez l'énergie cinétique des mésons.