Université de Nice - Sophia Antipolis **Année 2011-20012**

Licence SM-MP 2ème année : HYDRODYNAMIQUE

Epreuve du 10 janvier 2012 $-\nabla P\, dV + \rho \vec{g}\, dV$

Durée conseillée : 2 heures
Aucun document n'est autorisé.
Calculatrice interdite.

Exercice 1 : *Plongeur*

L'eau où un plongeur évolue est considérée comme un liquide homogène et incompressible, de masse volumique $\rho = 10^3\, kg.m^{-3}$, en équilibre dans le champ de pesanteur $\vec{g}$ uniforme, avec $g = 10\, m.s^{-2}$. La surface libre de l'eau (altitude $z = 0$, axe z dirigé vers le bas) est en contact avec l'atmosphère, de pression constante $P_0 = 10^5\, Pa$.

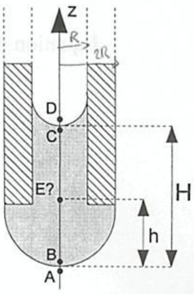
1) Exprimer littéralement, la pression p(z) de l'eau en un point de profondeur z.

2) On assimile l'air contenu dans les poumons du plongeur à un gaz parfait ; cet air est caractérisé par une pression $p(z)$ identique à celle de l'eau à la profondeur z , un volume $V(z)$ (capacité pulmonaire) variable (la cage thoracique se déforme sous l'effet de la pression), et enfin par une température T_0 , constante et indépendante de la profondeur. Calculer la capacité pulmonaire du plongeur à une altitude z sachant que celui-ci, avant de plonger, gonfle ses poumons à leur capacité maximale V_M puis bloque sa respiration.

3) On appelle m la masse du plongeur, $Vc(z)$ le volume de son corps et V_0 le volume de son corps hors celui de la cage thoracique.
On définit le poids apparent du plongeur P_{app} comme la résultante de la poussée d'Archimède et des forces de pesanteur. Comment varie le poids apparent lorsque la profondeur augmente ? Diminue-t-il ou augmente-t-il ?

4) Afin de faciliter leur descente lors des premiers mètres (poids apparent négatif), les plongeurs utilisent souvent un lest, plaque de plomb de volume négligeable, accrochée à une ceinture et facilement largable. Ce lest ne doit pas être trop lourd car un surlestage peut inciter à descendre à une profondeur excessive. Quelle masse m_1 de lest choisir si l'on adopte comme règle de sécurité le fait que le plongeur doit avoir un poids apparent nul à la profondeur z_c= 4 mètres ? Application numérique : $V_M = 7 \times 10^{-3} m^3$, $V_0 = 0,077 m^3$ et $m = 80 kg$.

Exercice 2 : *Extrémité de tube*
(d'après *Résumé du cours « Mécanique des Fluides »* , Henri Broch)

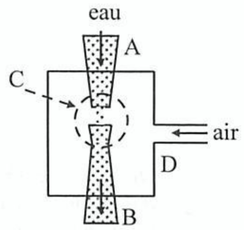


On considère un tube capillaire vertical en verre de rayon intérieur R et extérieur $2R$. Une goutte de liquide, de masse volumique ρ et de tension superficielle γ, est en équilibre à l'extrémité du tube.
Les deux ménisques de la goutte sont supposés hémisphériques, de rayons respectifs $2R$ (à la base) et R (dans le tube).

1) Déterminer la distance H séparant les deux ménisques suivant l'axe Oz.

2) Tracer la pression en fonction de z et déterminer la position h du point E dans la goutte qui est à la pression atmosphérique P_0.

Exercice 3 : ***Trompe à eau***



Une trompe à eau est constituée par un tuyau convergent A branché sur un robinet d'eau courante et d'un tuyau divergent B. L'espace libre C entre les deux tuyaux, en contact avec l'air, est enfermé dans une cavité étanche, qui communique avec l'extérieur par un fin tuyau D. L'eau qui jaillit de l'extrémité inférieure de A est recueillie dans le tuyau B. Le jet sort de B à la pression atmosphérique. L'écoulement de l'eau crée une dépression dans l'enceinte étanche. Ce système permet d'aspirer de l'air par le tuyau D.

On ne s'intéresse par la suite qu'au tuyau A. L'eau est considérée ici comme un fluide parfait incompressible de masse volumique $\rho=10^3\,\mathrm{kg.m^{-3}}$. Soient P_1, v_1, P_2, v_2 les pressions et les vitesses aux extrémités supérieures et inférieures de A de section S_1 et S_2 et Q le débit volumique d'eau dans A.

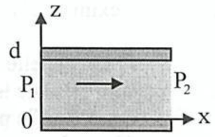
On suppose que la vitesse d'écoulement de l'eau est uniforme sur toute la section du tuyau A perpendiculaire à l'écoulement.

1) Donner l'expression de Q aux extrémités de A.

2) Appliquer la relation de Bernoulli dans le tube A et donner une relation entre P_1 et P_2 en fonction de S_1 et S_2 et Q. On négligera la différence de hauteur entre les extrémités de A.

3) Application numérique : sections du tube A aux extrémités : $S_1=100\ \mathrm{mm^2}$, $S_2=5\ \mathrm{mm^2}$, $Q=50\ \mathrm{cm^3.s^{-1}}$, $P_1=1{,}2.10^5$ Pa. Calculer P_2.

Exercice 4 : ***Ecoulement de Poiseuille plan***



Un liquide newtonien incompressible s'écoule dans un capillaire de section rectangulaire. Le capillaire est constitué de deux plans immobiles, parallèles au plan *xOy* et séparés par une hauteur d. La largeur *l* (suivant *y*) et la longueur *L* (suivant *x*) des deux plans étant très grandes par rapport à *d*, on considère qu'ils sont infinis.

On impose une différence de pression entre l'entrée et la sortie du capillaire $\Delta P=P_1-P_2$. On cherche une solution stationnaire de la forme $\vec{v}=v(x,z)\hat{x}$ correspondant à un écoulement unidirectionnel.

On néglige les effets de la pesanteur dans ce problème.

1) En utilisant l'équation de conservation de la masse, simplifier la forme de $\vec{v}$.

2) Enoncer les conditions aux limites pour le champ de vitesse.

3) A partir de l'équation de Navier-Stokes, trouver la solution $\vec{v}$, *P* du problème.

4) Représenter le profil de vitesse.

5) Calculer le débit q_V du liquide en fonction de ΔP , *L*, *l*, *d* et η la viscosité du fluide.

Equation de Navier-Stokes : $\rho\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\rho(\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v}=-\vec{\nabla}P+\eta\Delta\vec{v}$