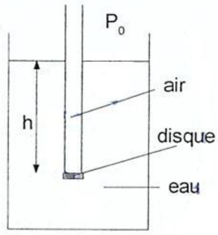
Université de Nice - Sophia Antipolis **Année 2010-2011**

Licence SM-MP 2ème année : HYDRODYNAMIQUE

Epreuve du 11 janvier 2011

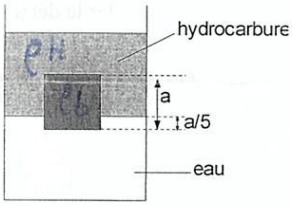
Durée : 2 heures
Aucun document n'est autorisé.

Exercice n°1 : *Hydrostatique, forces de pression*



On plaque à une extrémité d'un tube cylindrique ouvert (de section S) un disque d'acier de masse m (et d'épaisseur négligeable). On plonge le tout dans de l'eau, le tube étant vertical. Soit h la distance entre l'extrémité inférieure du tube et la surface libre de l'eau.
On observe que pour une profondeur h suffisante ($h>h_{min}$), le disque reste plaqué à l'embouchure du tube.
1) Expliquer le phénomène (faire un bilan des forces sur le disque)
2) Déterminer la profondeur minimale h_{min} pour que le disque reste plaqué contre le tube.
Application numérique : $S=10\ cm^2$, $m=40g$ et $\rho_{eau}=1.\,10^3\,kg/m^3$

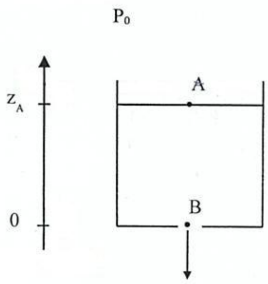
Exercice n°2 : *Solide à l'interface entre deux liquides.*



Un solide homogène cubique, de côté a, flotte sur la surface de séparation de deux liquides non miscibles : de l'eau (masse volumique $\rho_{eau}=1.\,10^3\,kg/m^3$) et un hydrocarbure de masse volumique $\rho_h=0{,}75\,10^3\,kg/m^3$. Les hauteurs des liquides sont supérieures à a.
Le bloc est immergé dans l'eau sur 1/5 de sa hauteur.

1) Donner sans calcul un encadrement de la densité du bloc.
2) Faire un bilan des forces s'exerçant sur le cube. Exprimer la masse volumique ρ_{bloc} du bloc en fonction des données du problème. Calculer ρ_{bloc}.

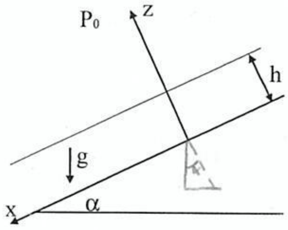
Exercice n°3 : *Vidange d'un réservoir cylindrique.*



1) On considère un récipient de forme cylindrique, de section S_A et de hauteur H, rempli d'un liquide dont on peut négliger la viscosité (fluide "parfait"). Le fond du récipient est percé d'un très petit orifice de section S_B ($S_B<<S_A$) au niveau du point B, par lequel s'écoule le liquide à l'air libre. La surface supérieure du liquide est également à l'air libre, à la même pression P_0.
a) Donner deux équations permettant de relier les vitesses du liquide en A (point situé sur la surface supérieure) et en B.
b) Préciser la pression en B. Justifier votre réponse.
c) Exprimer la vitesse v_A du fluide en fonction des donnés du problème (simplifier en tenant compte que $S_B<<S_A$). En déduire l'équation différentielle en $z_A(t)$, où $z_A(t)$ est la hauteur de liquide dans le récipient, compté à partir de B, à l'instant t.
d) A partir de l'équation différentielle précédente, déterminer la durée T nécessaire pour vider le récipient. Application numérique : $S_B=1\ cm^2$, $S_A=100\ cm^2$ et $H=50cm$.

Exercice n°4 : ***Ecoulement le long d'un plan incliné***

On considère une couche de fluide incompressible, de masse volumique ρ , de viscosité dynamique η , en écoulement (sous son propre poids) sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale. On suppose que l'écoulement est stationnaire et que l'épaisseur h du fluide est constant le long du plan incliné. Les dimensions du plan étant très grandes devant la hauteur h, on considère le plan comme infini.



1) On cherche un écoulement dont la vitesse est partout parallèle au plan incliné dans la direction 0x. A partir de la relation de conservation de la masse et de la symétrie du problème, déterminer de quelles variables (x,y,z) dépend le champ de vitesse $\vec{v}$.

2) Ecrire et simplifier l'équation de Navier-Stokes en coordonnées cartésiennes (on admettra que les composantes du gradient de pression parallèles au plan sont nulles : $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$).

3) Expliquer pourquoi les conditions aux limites du champ de vitesse sont $v(z=0)=0$ et $\left.\frac{dv_x}{dz}\right|_{z=h} = 0$ (on néglige la viscosité de l'air).

4) Calculer la vitesse du fluide en résolvant l'équation de Navier-Stokes. Représenter le profil de vitesse.

5) Calculer le débit volumique q_V à travers une section transversale de largeur L.

On donne : Equation de Navier-Stokes $\rho\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+\rho(\vec{v}\,.\,\vec{\nabla})\,\vec{v}=-\vec{\nabla}\,p+\eta\,\Delta\vec{v}+\rho\,\vec{g}$.