Licence SM2 — Méthodes Mathématiques pour la Physique

Contrôle du 12/4/2012

durée : 1h30

Documents, calculatrices, téléphones portables, et tous appareils électroniques interdits (sauf montres). On fera particulièrement attention à la rédaction.

1 Questions de cours (4 points)

1. Soit f une fonction périodique de période $T = 2L$. Donner l'expression de ses coefficients de Fourier
   - OU BIEN réels : a_n, $n \geqslant 0$ et b_n, $n > 0$.
   - OU BIEN complexes : c_n, $n \in \mathbb{Z}$.
2. Énoncer le théorème de Dirichlet (on pourra se contenter du cas d'une fonction continue périodique).
3. Soit f une fonction continue $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Donner l'expression de sa transformée de Fourier.
4. Décrire, définir la fonction δ de Dirac.

2 Suite de fonctions (4 points)

Soit $f_n(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$.

1. Trouver la limite simple f de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
   Indication : Prendre le logarithme de $f_n(x)$, et utiliser le développement limité de $\ln(1+u)$ au voisinage de $u = 0$.
2. La convergence est-elle uniforme sur un intervalle $[0, A]$ où $A > 0$ quelconque ?
   Rappel : pour tout $u \in \mathbb{R}$, $1 + u \leqslant e^u$.
3. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

$1 - \frac{u}{\cancel{2}} + \frac{u^2}{2}$

3 Équation de Propagation

Soit $f(x,t)$ l'amplitude d'une onde, où x est la variable spatiale, et t la variable temporelle. L'équation de propagation des ondes en physique est :

$$\Delta f - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

où c est la célérité, la vitesse de propagation de l'onde, et Δ est l'opérateur Laplacien ; en une dimension, comme ce sera le cas ici, $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.

On note $f_0(x) = f(x,0)$ la fonction de la variable spatiale correspondant à la condition initiale.

3.1 Espace infini (5 points)

On note $g_0(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(x,0)$, la dérivée de f selon t à $t = 0$. Attention : $g_0 \neq f_0'$.

Soit $\hat{f}$ la transformée de Fourier spatiale de f, c'est-à-dire $\hat{f}(\xi,t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t)e^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x$.

1. Trouver l'équation vérifiée par $\hat{f}$.
2. Trouver les conditions initiales vérifiées par $\hat{f}$.
3. En déduire $\hat{f}$ en fonction de $\hat{f}_0$ et de $\hat{g}_0$.
4. Écrire f sous la forme de l'intégralle d'une fonction dépendant de $\hat{f}_0$ et $\hat{g}_0$.

3.2 Espace borné (7 points)

On considère un cas où f est définie pour $0 \leqslant x \leqslant L$, et pour tout t, $f(0,t) = f(L,t) = 0$. C'est le cas d'une corde de longueur L tendue entre deux points fixes, par exemple.

1. En posant $f(x,t) = A(x)B(t)$ (séparation des variables), montrer que $c^2\frac{A''}{A} = \frac{B''}{B} = C$ où C est une constante.

2. En posant $C = -4\pi^2/\lambda^2$, trouver la forme des fonctions A et B.

3. À partir des conditions au bord, préciser l'allure de $A(x)$. Expliciter une éventuelle contrainte sur λ.

   Les solutions de type $A(x)B(t)$ sont appelées des ondes stationnaires : l'allure $A(x)$ est fixée, et seule l'amplitude $B(t)$ oscille. La solution générale de l'équation de propagation est une somme (voire une série) de solutions particulières telles que trouvées ci-dessus. On note $A_n(x) = \sin(n\pi x/L)$ et $B_n(t) = \cos(n\pi ct/L)$.

4. On suppose maintenant que $f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n A_n(x) B_n(t)$. Comment interpréter la condition initiale $f(x,0) = f_0(x)$? Que vaut α_n ?

5. On suppose que $f_0(x) = (L/2)^2 - (x - L/2)^2$ pour $0 \leqslant x \leqslant L$. Développer f_0 en série de Fourier (on supposera f_0 de période $2L$ et impaire), et en déduire la solution de l'équation de propagation telle que $f(x,0) = f_0(x)$.

6. Retrouve-t-on $f(x,t) = f_0(x)$ pour certaines valeurs de t ? Si oui, lesquelles ?

7. A-t-on pour tout t, $f(x,t) = D(t) f_0(x)$, où $D(t)$ ne dépend que de t ? Si oui, expliciter $D(t)$.

$\cos(x \sim + C \sin^{\sim 2}$

$C_0 e^{-ct}$

$m.s^{-1}$ $\cancel{s}.m^{-1}$