Licence SM2 — Méthodes Mathématiques pour la Physique

Contrôle du 23/2/2012

durée : 1h30 2h45

Documents, calculatrices, téléphones portables, et tous appareils électroniques interdits (sauf montres). On fera particulièrement attention à la rédaction.

1 Questions de cours (4 points)

1. Définissez le polynôme caractéristique d'une matrice carrée M.
2. Que sont les racines du polynôme caractéristique ?
3. Énoncez le théorème de Cayley-Hamilton.

2 Base orthonormale (8 points)

Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure usuelle d'espace vectoriel euclidien. Pour rappel, si $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ et $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$, le produit scalaire est donné par : $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$. On note $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique ($\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$).

On pose $\vec{u}_1 = (1,2,1)$, $\vec{u}_2 = (-2,0,1)$, $\vec{u}_3 = (0,1,2)$.

1. Monter que la famille $\mathcal{C} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est une base de E.
2. $\mathcal{C}$ est-elle une famille orthogonale ? Si non, trouver son orhtogonalisée de Gram-Schmidt $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$.
3. Trouver l'othonomalisée de Gram-Schmidt de $\mathcal{C}$, notée $\mathcal{D} = (\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3)$.
4. Soit $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ dans la base canonique. Quelles sont les coordonnées de $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{D}$?
5. Soit $\vec{y}$ de coordonnées (y'_1, y'_2, y'_3) dans la base $\mathcal{D}$. Quelles sont ses coordonnées dans la base canonique ?

3 Diagonalisation de matrice (8 points)

Soit $M = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ -2 & 6 & -4 \\ -1 & 4 & -4 \end{pmatrix}$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à M dans la base canonique $\mathcal{B}$ définie dans l'exercice précédent (autrement dit, $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$).

1. Calculer $f(\vec{u}_1)$, avec $\vec{u}_1$ défini à l'exercice précédent. Qu'en déduisez-vous ?
2. Calculer le polynôme caractéristique de M.
3. Trouver le spectre de M, et préciser la multiplicité des valeurs propres.
4. Déterminer les espaces propres associés aux valeurs propres 3 et -2. Préciser leurs dimensions. Qu'en déduisez-vous ?
5. Si possible, donner une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de M, et la matrice de changement de base $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}$.
6. Conclure : comment diagonaliser M, et quel résultat obtiendra-t-on ?
7. *Question bonus :*
   Est-il possible de trouver une base otrhonormée de vecteurs propres de M ? Justifier.