UNIVERSITÉ DE NICE
MÉTH. MATH. PHYSIQUE

L2MPIE
2010–2011

Contrôle 3 Novembre 2010

CALCULATRICES ET DOCUMENTS INTERDITS
DURÉE : UNE HEURE TRENTE

SUJET A

1. On suppose que $z = f(x, y)$ a des dérivés partielles secondes continues et que $x = \phi(r, s)$ et $y = \psi(r, s)$. Il est demandé de :

   (a) à partir de la définition de différentielle, montrer que
   $$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}.$$

   (b) On suppose que $x = r^2 + s^2$ et $y = 2rs$. Calculer $\dfrac{\partial z}{\partial r}$ et $\dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2}$.

2. Soit la forme différentielle
   $$\omega(x, y) = \left(-y\sin(x) + x^3\right) dx + \cos(x)dy.$$
   Déterminer si c'est une forme différentielle exacte en appliquant le théorème de Schwarz et, le cas échéant, calculer la fonction $F(x, y)$ telle que $dF(x, y) = \omega(x, y)$.

3. Soit la fonction de deux variables $f(x, y)$ de classe C^{n+1}, $n \in \mathbb{N}^+$.

   (a) Ecrire le développement en série de Taylor de $f(x, y)$ jusqu'a l'ordre n.

   (b) Particulariser l'expression précedente si $f(x, y) = -\cos(x)\cos(y) + a\sin(x)\sin(y) - 1$ ($a \in \mathbb{R}$) jusqu'à l'ordre $n = 2$ autour du point $(x, y) = (0, 0)$.

   (c) Utiliser le résultat précédent pour étudier la nature (maximum, minimum ou point selle) du point critique $(x, y) = (0, 0)$ en fonction de la valeur de a.
   Indication : compléter le carré dans le résultat du développement de Taylor.

   (d) Retrouver le résultat du calcul précedent en utilisant directement le Test des dérivées secondes (Hessien).

T. S. V. P. ⟶

4. Soit la fonction, exprimée en coordonée polaires, $r = \sin^2(2\theta)$, avec $\theta \in [0, 2\pi]$.
   (a) Dessiner la courbe en coordonnées polaires (r en fonction de θ).
   (b) Dessiner la courbe en coordonnées cartésiennes (y en fonction de x).
   (c) Calculer la surface d'une boucle de la courbe.

5. Dessiner le domaine d'intégration et calculer l'intégrale $\int_0^{2a} dy\, y \int_0^{\sqrt{2ay-y^2}} dx$, $a \in \mathbb{R}^+$.