PARTIEL MMP Nancoo, avril 2009

UNIVERSITÉ DE NICE
MÉTH. MATH. PHYSIQUE

L2SM
2008–2009

Partiel 2 Avril 2009 Sujet B

CALCULATRICES ET DOCUMENTS INTERDITS

DURÉE : 2 HEURES

Questions de cours

8

1. Soit E un espace vectoriel euclidien et A un sous-ensemble de E. Montrer que $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

2. Écrire la définition de matrice orthogonale. Puis prouver que si A est une matrice orthogonale, $\det(A) = \pm 1$.

3. Soit E un espace vectoriel eucliden de dimension n. Soit $\{x_1, x_2, \dots x_n\}$ une base orthonormale de E. Prouver que tout vecteur $y \in E$ peut s'exprimer comme

$$y = \sum_{i=1}^{n} \langle y, x_i \rangle x_i.$$

Exercice

12

Soient l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, $\mathcal{A}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $A = Mat_{\mathcal{A}}(f)$ définie par

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

1. On considère la nouvelle base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ où $u_1 = (2/3, 2/3, 1/3)$, $u_2 = (-1/3, 2/3, -2/3)$ et $u_3 = (-2/3, 1/3, 2/3)$. Calculer la matrice de passage P de $\mathcal{A}$ à $\mathcal{B}$. Vérifier que $P^{-1} = P^{\mathrm{T}}$ et que $\det(P) = 1$.
2. Calculer l'axe de rotation et l'angle de rotation associés à P.
3. Déterminer B, la matrice associée à f dans la nouvelle base $\mathcal{B}$.
4. Calculer B^n puis A^n, où $n \in \mathbb{N}$.
5. On considère un vecteur générique $x \in E$. On procède sur x à la rotation associée a P puis une projection sur le sous-espace F généré par le vecteur $(1, 2, 1)$. Calculer
   - La matrice P_F du projecteur sur F.
   - La matrice de la transformation globale correspondant à *(i)* effectuer la rotation *puis (ii)* effectuer la projection.