EXAM MMP Marcos, mai 2009

UNIVERSITÉ DE NICE
MÉTH. MATH. PHYSIQUE

L2SM
2008–2009

Examen 20 Mai 2009

CALCULATRICES ET DOCUMENTS INTERDITS
DURÉE : 2 HEURES

OSCILLATEURS COUPLÉS

On étudie les équations du mouvement de trois oscillateurs de masse unitaire couplés par des ressort, voir figure page suivante. La constante k est la raideur des ressorts des extremités (fixés à un mur) et q est celle des deux autres. Les équations du mouvement peuvent s'écrire sous forme matricielle comme

$$\frac{d^2\vec{x}(t)}{dt^2} = \mathcal{D}\,\vec{x}(t),$$

où

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{D} = \begin{pmatrix} -k-q & q & 0 \\ q & -2q & q \\ 0 & q & -k-q \end{pmatrix}.$$

1. La matrice $\mathcal{D}$ est symmétrique, i.e., $\mathcal{D}^T = \mathcal{D}$. Prouver que les vecteurs propres correspondant à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.
2. Pour simplifier le problème, on suppose que $k = 2q$. Calculer les fréquences et les modes propres (i.e. valeurs et vecteurs propres).
3. Écrire puis résoudre les équations du mouvement dans la base dans laquelle $\mathcal{D}$ est diagonale. On notera $\vec{y}(t)$ le vecteur $\vec{x}(t)$ dans cette nouvelle base.
4. Calculer la position de chaque oscillateur au temps t pour des conditions initiales arbitraires.

ÉQUATION DE LA CHALEUR

Résoudre l'équation $u_t(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t)$ (où $\alpha \in \mathbb{R}$) avec les conditions aux bords

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \end{cases} \qquad 0 \le t < \infty$$

et la condition initiale

$$u(x,0) = \frac{x}{L}\left[1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right] \qquad 0 \le x \le L.$$

TRANSFORMÉE DE FOURIER

Calculer la transformée de Fourier de $f(x) = |x|e^{-\alpha|x|}$, où $x \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$.