Univ. Nice Sophia Antipolis L2 SM	**Mathématiques** Examen du 17 décembre 2009	2009–2010 Semestre 3

Durée : 2h. Documents et calculatrice interdits. La note tiendra compte du soin apporté à la présentation et à la rédaction de la copie.

Exercice 1. On considère le domaine $\mathcal{D}$ défini par

$$\mathcal{D} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; \quad x > 0 , \quad y > 0 , \quad z > 0 , \quad x^2 + y^2 > \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 + z^2 < 1 \right\} .$$

Représenter le domaine $\mathcal{D}$. Calculer le volume de $\mathcal{D}$.

Exercice 2. En utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange, déterminer les points les plus proches de la courbe d'équation $x^2 + 2xy - y^2 = 4$ à l'origine.

Exercice 3. On considère l'équation différentielle

$$\sin(x)\, y' + \cos(x)\, y = \sin(x) \cos(x) . \qquad (E_1)$$

(1) Déterminer les solutions générales de (E_1) sur $]0, \pi[$.

(2) L'équation (E_1) admet-elle des solutions sur $\mathbb{R}$?

Exercice 4. On considère l'équation différentielle

$$y'' + 2y' + 5y = 5 \cos(x) . \qquad (E_2)$$

(1) Déterminer les solutions générales de (E_2) sur $\mathbb{R}$.

(2) Donner la solution de (E_2) vérifiant les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 0$.

Exercice 5. On veut résoudre l'équation différentielle

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0 . \qquad (E_3)$$

(1) Chercher une solution particulière de (E_3) sous la forme $y = x^\alpha$ avec $\alpha > 0$.

(2) En utilisant le changement de fonction $y = x^\alpha z$, trouver toutes les solutions de (E_3) sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

(3) Déterminer les solutions de (E_3) sur $\mathbb{R}$.