Univ. Nice Sophia Antipolis | Mathématiques | 2009-2010
L2 SM | Examen du 30 octobre 2009 | Semestre 3

Mathématiques

Examen du 30 octobre 2009

(Durée : 1h30, documents et calculatrice non autorisés)

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

(1) $z^2 - 2z + 2 = 0$,

(2) $z^2 - 4z + 4 - 2i = 0$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la fonction définie par $f(x,y,z) = (xy, yz + x, x + y + z)$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $g(x,y,z) = (x - y, z - x^2)$.

(1) Donner les matrices jacobiennes de f et g en un point (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$.

(2) En déduire la matrice jacobienne de la fonction $g \circ f$ (on utilisera la formule du cours, on ne cherchera pas à calculer explicitement la fonction $g \circ f$).

Exercice 3. Donner la formule de Taylor (ou développement limité) à l'ordre 2 en $(0,0)$ de la fonction

$$f(x,y) = 2xe^x + y + \cos(x - y).$$

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = (x+y)^3 + 3xy$.

(1) Calculer le gradient et la hessienne de f.

(2) Déterminer les points critiques de f.

(3) Parmi ces points, lesquels sont des extrema locaux de f ?

(4) Est-ce que f possède un maximum global ou un minimum global sur $\mathbb{R}^2$?

(5) On considère maintenant la fonction f définie uniquement sur $A = [-1,1] \times [-1,1]$.

(a) Représenter graphiquement l'ensemble A et justifier que f admet un minimum global et un maximum global sur A.

(b) Déterminer ce minimum global et ce maximum global de f sur A (on pourra étudier rapidement les fonctions $g(t) = (t-1)^3 - 3t$ et $h(t) = (t+1)^3 + 3t$ sur l'intervalle $I = [-1,1]$).