UNIVERSITÉ DE NICE
MÉTH. MATH. PHYSIQUE

L2SM
2009–2010

Examen 21 mai 2010

CALCULATRICES ET DOCUMENTS INTERDITS
DURÉE : DEUX HEURES

Questions de cours

1. Soit E un espace vectoriel euclidien réel de dimension n muni du produit scalaire usuel et $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme *symétrique* de E.
   (a) À l'aide du produit scalaire, donner la définition *d'endomorphisme symétrique*.
   (b) Soit $A = \mathcal{M}at(f)$ la matrice associée à l'endomorphisme dans une base orthonormale de E. Quelle est, à partir de *(a)*, l'égalité que doivent vérifier A et A^T avec des vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ quelconques ? Montrer que dans ce cas, A est symétrique, c'est-à-dire, $A = A^T$.
   (c) Prouver que toutes le valeurs propres de A son réelles.
   Indication : supposer que $\vec{x}$ est un vecteur propre de A avec valeur propre associée λ supposée complèxe. Évaluer $(\lambda - \lambda^*)\vec{x}^T\vec{x}^*$.

2. On suppose que l'on peut écrire la fonction $f(x)$ sous forme de la série de Fourier sinus dans l'intervalle $[0, L]$, $L \in \mathbb{R}$:
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$
   Prouver que les coefficients a_n sont donnés par la formule
$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx.$$

Exercices

1. Déterminer si les matrices suivantes sont diagonalisables :

$$(a)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad (b)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (c)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Soient l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et A la matrice associée à un endomorphisme dans cet espace, exprimée dans la base canonique :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calculer les valeurs propres de A.
   (b) Calculer les vecteurs propres de A.
   (c) Écrire la matrice de passage P entre la base canonique et la base dans laquelle A est diagonale.
   (d) Il est possible de vérifier que P est une matrice de rotation. Trouver l'axe de rotation et l'angle de rotation.
   Indication : $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\| \cos(\theta)$, où θ est le plus petit angle entre $\vec{x}$ et $\vec{y}$.

3. Calculer la transformée de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1. \end{cases}$$

   Indication : $\mathcal{F}[f(x)] = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx}\, dx.$

4. Résoudre l'équation

$$u_t(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t) \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

   avec les conditions aux bords

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 0 \end{cases} \qquad 0 \leq t < \infty$$

   et la condition initiale

$$u(x,0) = x\left(1 - x^2\right) \quad 0 \leq x \leq 1.$$

   Indications : Utiliser les formules de la question 2 de cours et

$$\int_0^1 x^3 \sin(n\pi x)\, dx = \frac{(-1)^n (6 - n^2\pi^2)}{(n\pi)^3}, \; n \in \mathbb{N}.$$