UNIVERSITÉ DE NICE
MÉTH. MATH. PHYSIQUE

L2SM
2009–2010

Partiel 1^{er} Avril 2010 Sujet B

CALCULATRICES ET DOCUMENTS INTERDITS

DURÉE : 1 HEURE TRENTE

Questions de cours

Soit E un espace vectoriel réel de dimension n muni de la base canonique $\mathcal{A} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ et la base $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$. On considère un vecteur $\vec{y} \in E$, et l'on note a_1, a_2,..., a_n ses coordonnées dans la base $\mathcal{A}$ et b_1, b_2,..., b_n ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$, c'est-à-dire :

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{n} b_i \vec{v}_i.$$

La relation entre les deux bases est définie à travers la matrice S, avec élements de matrice $s_{ij} = [S]_{ij}$:

$$\vec{v}_j = \sum_{i=1}^{n} s_{ij} \vec{e}_i.$$

1. Montrer que la relation entre les coordonnées est :

$$a_i = \sum_{i=1}^{n} s_{ij} b_j.$$

2. On introduit le produit scalaire usuel et on considère que la bases $\mathcal{B}$ est une base orthonormale ($\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = \delta_{ij}$). Prouver qu'un vecteur $\vec{y} \in E$ peut s'exprimer comme

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{y}, \vec{v}_i \rangle \vec{v}_i.$$

3. Montrer que si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des bases orthonormales ($\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = \delta_{ij}$) alors

$$\sum_{k=1}^{n} s_{ki} s_{kj} = \delta_{ij}.$$

Indication : partir de la relation $\langle \vec{v}_j, \vec{v}_m \rangle = \delta_{jm}$ où $\vec{v}_m = \sum_{l=1}^{n} s_{lm} \vec{e}_l$.

4. Prouver que si le système de vecteurs $\mathcal{B}$ est orthonornal, alors il est forcément linéairement indépendant.

T. S. V. P. $\longrightarrow$

Exercice

Soient l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, $\mathcal{A}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $A = Mat_{\mathcal{A}}(f)$ définie par

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 10 & 2 & -2 \\ 2 & 13 & -4 \\ -2 & -4 & 13 \end{pmatrix}.$$

1. On considère la nouvelle base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ où $v_1 = (2/3, -2/3, -1/3)$, $v_2 = (-2/3, -1/3, -2/3)$ et $v_3 = (1/3, 2/3, -2/3)$. Calculer la matrice de passage S de $\mathcal{A}$ à $\mathcal{B}$.
2. Calculer $B = Mat_{\mathcal{B}}(f)$.
3. Calculer B^n puis A^n, où $n \in \mathbb{N}$.
4. Il est possible de vérifier que S est une matrice de rotation. Trouver l'axe de rotation et l'angle de rotation.
   Indication : $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\| \cos(\theta)$, où θ est le plus petit angle entre $\vec{x}$ et $\vec{y}$.

$A^T = A^{-1}$

$\det A = 1$

$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\times\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\right)$

$\frac{2}{9} + \frac{4}{9}$

-2-