Université de Nice - Sophia Antipolis
Année universitaire 2011-2012

EXAMEN

Mécanique Quantique L2
1/6 – 2012, 9h00 – 11h00
Amphi Physique 2

- Démarrer chaque exercice sur une nouvelle feuille.
- Écrire votre nom sur chaque feuille.
- Toutes réponses sont à présenter de façon claire et bien lisible.
- Tous les raisonnements doivent être expliqués.

Constantes Physiques

$c = 299\,792\,458$ m/s
$h = 6.626\,076 \times 10^{-34}$ Js
$\epsilon_0 = 8.854\,188 \times 10^{-12}$F/m
$R_\infty = 10\,973\,731.534$ m^{-1}
$m_e = 9.109\,390 \times 10^{-31}$ kg
$\hbar^2/(2m_e a_0^2) = e^2/(8\pi\epsilon_0 a_0) = 13.61$ eV

$k_B = 1.380\,658 \times 10^{-23}$ J/K
$\hbar = 1.054\,573 \times 10^{-34}$ Js
$e = 1.602\,177 \times 10^{-19}$ C
$a_0 = 0.529\,177 \times 10^{-10}$ m
$N_A = 6.022\,137$ mol^{-1}

1 Selon le modèle de Bohr, les raies d'émission d'hydrogène sont donné par :

$$\frac{1}{\lambda} = R_\infty \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)$$

a. Calculer les longueurs d'ondes des trois premières raies (celles ayant les énergies les plus basses) pour les séries de Lyman ($n = 1$) et de Balmer ($n = 2$) (les deux premières séries). Donner les résultats en nanomètres, avec quatre chiffres significatifs.

b. À quelles fréquences (en hertz), et à quelles énergies photoniques (en électron-volts) correspondent ces six longueurs d'onde ? Indiquer aussi les couleurs auxquelles elles correspondent.

c. Utiliser le modèle de Bohr pour estimer l'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène (en eV).

---

2 Soient $|1\rangle$, $|2\rangle$ et $|3\rangle$ trois vecteurs propres, orthonormés, d'un Hamiltonien H, correspondant à trois valeurs propres différentes, $E_1 = 5E_0$, $E_2 = 3E_0$ et $E_3 = -4E_0$.
On considère le vecteur, non-normalisé :

$$|\psi\rangle = 3|1\rangle - 2\mathrm{i}|2\rangle - 5|3\rangle$$

a. Normaliser le vecteur $|\psi\rangle$
b. Si on mesure l'énergie du système, quelle est la probabilité d'obtenir l'énergie $3E_0$?
c. Dans quel état se trouve le système après une mesure où on a bien obtenu l'énergie $3E_0$?
d. Écrire le Hamiltonian.
e. Quelle est la valeur moyenne $\langle E\rangle$ de l'énergie de l'état $|\psi\rangle$?
f. Quelle est la dispersion $\Delta E = \sqrt{\langle E^2\rangle - \langle E\rangle^2}$ de l'énergie ?

---

3 Considérons un atome de spin 1/2, qui a été préparé dans l'état $|+\rangle_z$. Cet état quantique correspond au résultat $+\hbar/2$ dans une mesure de spin selon l'axe $\hat{z}$ (correspondant à l'opérateur $\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_z$). Pour une mesure de spin selon une direction arbitraire, $\vec{u}$, l'opérateur S_u s'écrit :

$$S_u = \vec{S}\cdot\vec{u} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{u}\,.$$

Ici, $\vec{\sigma}$ est le tenseur des matrices de Pauli :

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix},$$

et

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Supposons que la direction $\vec{u}$ est définie en coordonnées sphériques par :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix},$$

a. Donner les valeurs propres et les vecteurs propres de S_u, ($|+\rangle_u$ et $|-\rangle_u$) exprimés dans la base : $\{|+\rangle_z$ et $|-\rangle_z\}$.
b. On effectue une mesure du spin selon $\vec{u}$. Calculer la probabilité de trouver $+\hbar/2$ (la valeur propre qui correspond à $|+\rangle_u$).

---

4 Considérons deux états propres normalisés, $\psi_1(z)$ et $\psi_2(z)$, d'un Hamiltonien H correspondant à deux valeurs propres différentes E_1 et E_2, et $\hbar\omega = E_1 - E_2$.
Au temps initial ($t = 0$), le système se trouve dans l'état de superposition :

$$\Psi(z,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_1(z) - \psi_2(z)].$$

a. Calculer $\Psi(z,t)$.
b. Calculer $|\Psi(z,t)|^2$.

L'équation de Schrödinger dépendant du temps est :

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\Psi(z,t)}{\partial t} = H\,\Psi(z,t).$$