UNIVERSITÉ DE NICE
2011-12

SL2M
ALGÈBRE 2

Contrôle terminal

Jeudi 12 janvier 2012

Ni document, ni calculatrice.

Exercice 1. On considère la matrice 3×3 à coefficients réels suivante

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

FAISABLE

1.1. Quelles sont les valeurs propres de A ? Existe-t-il une base de vecteurs propres de $\mathbf{R}^3$ formée de vecteurs propres de A ? La matrice A est-elle diagonalisable ?

1.2. Mêmes questions pour la matrice

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

IDEM

Exercice 2. On travaille dans $\mathbf{R}^4$ muni de son produit scalaire usuel. On considère la matrice suivante de $\mathcal{M}_4(\mathbf{R})$

$$C := \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

2.1. Est-ce que le vecteur $u := (1, -1, -1, 1)$ est un vecteur propre de C ?
Si oui, quelle est la valeur propre correspondante ? On désigne par E l'espace propre associé. Déterminer une base orthonormée de E.

2.2. Trouver une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^4$ formée de vecteurs propres de la matrice C. Déterminer une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que $D = P^{-1}CP$.

2.3. Quel est le déterminant de la matrice C ?

2.4. On désigne par V_0 le vecteur $(1, 0, 0, 0)$ de $\mathbf{R}^4$. Calculer les coordonnées de V_0 dans la base $\mathcal{B}$ de vecteurs propres.

2.5. On considère la suite de vecteurs de $\mathbf{R}^4$ de premier terme V_0 définie par $V_{n+1} = CV_n$ pour n entier naturel. Calculer les coordonnées de V_n dans la base $\mathcal{B}$. Quel est le comportement de la suite $(V_n)_{n \in \mathbf{N}}$ lorsque n tend vers l'infini ?

??? => Matrices + suites = BORDEL!

AB j'avais même pas vu qu'il y avait des suites! :p => Ça n'aurait rien changé à mon avis!

Exercice 3. On considère l'espace vectoriel $\mathbf{R}^2$ muni du produit scalaire usuel et l'application linéaire $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ est la suivante

$$M := \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.1. On désigne par S le produit ${}^tM\,M$. Que peut-on dire a priori sur les valeurs propres et les espaces propres de la matrice S ?

3.2. Déterminer une base orthonormée de $\mathbf{R}^2$ formée de vecteurs propres de S. On désigne cette base par $\mathcal{B}$ et par P la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$. Calculer P^{-1}.

3.3. Vérifier que les vecteurs colonnes de la matrice MP forment une **famille orthogonale**. Quelles sont les normes des vecteurs de cette famille ? On appelle $\mathcal{B}_1$ la **base orthonormée** associée et Q la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}_1$. Calculer la matrice Q et son inverse Q^{-1}.

3.4. Calculer la matrice de f lorsqu'on prend comme base de départ $\mathcal{B}$ et comme base d'arrivée $\mathcal{B}_1$. On la désigne par T. Montrer que $Q^{-1}MP = T$. Calculer T^2. Comparer avec le produit $P^{-1}SP$.

3.5. *Cas général.* On considère une matrice $m \times n$ à coefficients réels M. Montrer que la matrice $S := {}^tM\,M$ est une matrice symétrique réelle dont les valeurs propres sont toutes positives ou nulles.

Au final, c'est de la merde ! XD

Tout à fait ^^

Algèbre ... ? !!!! Mais quelle idée ?!!!