EXAMEN - 25 mai 2011 (2h)

Les documents, les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.

SVP justifier toutes vos réponses

I/ Soit l'intégrale généralisée suivante

$$\int_0^1 \frac{1}{(x^2-x^3)^{1/3}}dx.$$

On se propose de montrer que cette intégrale est convergente et de la calculer.

1. Vérifier que la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{(x^2-x^3)^{1/3}}$ est positive et continue sur $]0,1[$.
2. Trouver un équivalent de f en 0^+, puis en 1^-.
3. Montrer que f est intégrable sur $]0,1[$.
4. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x^2-x^3)^{1/3}}dx$ est convergente.
5. On note I sa valeur. Montrer que
$$I = \int_0^1 \frac{1}{x\left(\frac{1}{x}-1\right)^{1/3}}dx.$$
6. Soit le changement de variable $u = \left(\dfrac{1}{x}-1\right)^{1/3}$ (on admettra que cette application est de classe $\mathcal{C}^1$ et est bijective de $]0,1]$ sur $[0,+\infty[$). Montrer que
$$I = 3\int_0^{+\infty} \frac{u}{u^3+1}du.$$
7. Soit le changement de variable $v = 1/u$. Montrer que
$$\frac{I}{3} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{v^3+1}dv.$$
8. En déduire que
$$\frac{2I}{3} = \int_0^{+\infty} \frac{u+1}{u^3+1}du = \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^2-u+1}.$$
9. Montrer que $x^2-x+1 = \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$.
10. Conclure que
$$I = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3}.$$

VOIR LA SUITE AU DOS !