Université Nice Sophia Antipolis 2010-11
1ère année Licence Mathématiques – Analyse II

**PARTIEL - 24 mars 2011 (1h30)**

**Les documents, les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.**

**SVP justifier toutes vos réponses**

**I/** Soit $P$ le polynôme suivant

$$P(x) = (x + 2i\sqrt{3})^3 - (x + i\sqrt{3}(1-i))^3.$$

1. Montrer que les racines de $P$ sont celles du polynôme $Q$ défini par

$$Q(x) = x^2 + \sqrt{3}(1+3i)x + 2(-3+2i).$$

2. Calculer les racines de $Q$ dans $\mathbb{C}$.

**II/** Soit la fonction définie sur $]-1,1[$ par

$$(1 + x^2 + x^4)(1+x)^{1/3}.$$

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en l'origine de cette fonction.
Dans l'expression du reste de votre développement limité, écrire explicitement si vous utilisez un grand $O$ ou un petit $o$.

2. Montrer que $\dfrac{(1+x^2+x^4)(1+x)^{1/3} - (1+x/3)}{x^2}$ admet une limite lorsque $x$ tend vers 0. Et calculez la.

3. En déduire que l'intégrale suivante est convergente

$$\int_0^1 \frac{(1+x^2+x^4)(1+x)^{1/3} - (1+x/3)}{x^2}\,dx.$$

**III/ Fonction $\Gamma$ d'Euler.** Pour $x > 0$, on note

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt.$$

1. Montrer que cette intégrale est convergente pour tout $x > 0$.

2. Soit $x > 1$. En utilisant une intégration par parties, montrez l'égalité suivante

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1).$$

3. Calculer $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (justifier vos calculs).

**IV/** Soit l'intégrale suivante pour $a \in \mathbb{R}$

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(1+t^a)}\,dt.$$

1. Montrer que $I(a)$ converge pour toute valeur $a \in \mathbb{R}$.

2. En procédant au changement de variable $u = 1/t$, montrer que

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{u^a}{(1+u^2)(1+u^a)}\,du.$$

3. En déduire que $2I(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$ et finalement $I(a) = \dfrac{\pi}{4}$.