Examen d'électromagnétisme - 12/01/2012

Durée : 2h - Calculatrices et documents interdits à l'exception du formulaire

La notation tiendra compte de la précision et de la rigueur des réponses.
Lire le sujet en entier avant de commencer.

Exercice 1 - Résistance d'un conducteur tronconique

5

On considère un conducteur tronconique de conductivité γ, de bases circulaires de rayons ρ_1 en $z = 0$ et ρ_2 en $z = H$ (voir Figure 1 ci-dessous). On va calculer sa résistance en le découpant en cylindres de hauteurs élémentaires dz et de rayons $\rho(z)$.

1. Établir l'expression de la résistance d'un conducteur cylindrique de rayon ρ, de hauteur h et de conductivité γ.
2. En déduire la résistance dR d'un cylindre de hauteur élémentaire dz et de rayon $\rho(z)$.
3. En utilisant la loi d'association des résistances, déduire de la question précédente la résistance totale du conducteur tronconique de la Figure 1. On intègrera sur ρ après avoir exprimé $d\rho$ en fonction de dz.

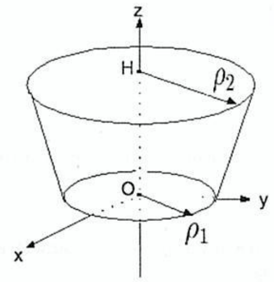

FIGURE 1 – Conducteur tronconique.

Exercice 2 - Nappe de courant infinie parcourue par un courant volumique uniforme

7

Une région de l'espace définie en coordonnées cartésiennes par $-d \leq y \leq d$ est parcourue par un courant volumique uniforme de densité $\vec{j_0} = j_0\hat{x}$. En dehors de cette région, il n'y a ni charge ni courant.

1. Faire une étude des symétries et des dépendances pour caractériser le champ magnétique $\vec{B}$ créé par cette distribution de courant dans tout l'espace. Préciser en la justifiant la valeur de $\vec{B}$ en tout point du plan (xOz).
2. Faire un schéma et représenter $\vec{B}$ des deux côtés de la nappe, ainsi que dans le plan $y = 0$.
3. En prenant des contours rectangulaires ABCD parallèles au plan (yOz), calculez par le théorème d'Ampère :
   (a) le champ $\vec{B}$ à l'intérieur de la nappe de courant. On placera dans ce cas tout le contour ABCD à l'intérieur de la nappe, avec un de ses côtés sur l'axe (Oz).
   (b) le champ $\vec{B}$ à l'extérieur de la nappe. On placera dans ce cas le côté AB du contour ABCD à l'intérieur de la nappe et le côté opposé CD à l'extérieur.
4. Tracez le graphe du module de $\vec{B}$.

Suite au verso.

Exercice 3 - Champ magnétique créé par une spire carrée

On considère la spire carrée $P_1P_2P_3P_4$, parcourue par un courant d'intensité I, et placée dans le plan xOy (Figure 2 ci-dessous, à gauche). On va calculer le champ magnétique créé par cette spire en tout point de l'axe (Oz). Pour cela, on va d'abord calculer le champ que crée un fil AB de longueur $2l$ parcouru par l'intensité I (Figure 2 ci-dessous, à droite). Ce fil est placé perpendiculairement au plan (xOy) et son milieu se trouve au point O.

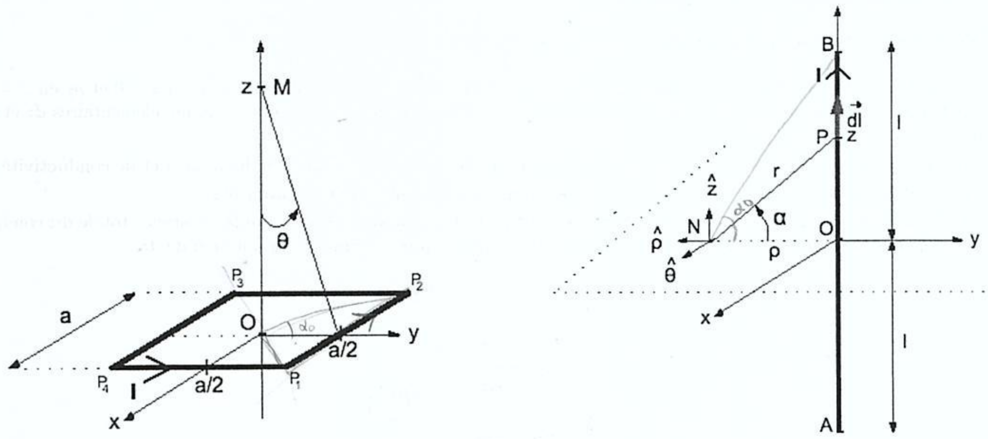

FIGURE 2 – À gauche : Spire carrée. À droite : Fil AB.

1. Pour le fil AB :
   (a) Faire une étude des symétries et des invariances pour caractériser le champ magnétique $\vec{B}_{fil}$ créé par le fil AB en tout point N du plan $(x0y)$.
   (b) Montrez que le champ élémentaire $\overrightarrow{dB}_{fil}$, créé en un point N du plan $(x0y)$ par l'élément $\overrightarrow{dl}$ situé en P à l'altitude z a pour module $dB_{fil} = \dfrac{\mu_0 I \cos\alpha}{4\pi\rho} d\alpha$.
   (c) En déduire le champ $\vec{B}_{fil}$ en fonction de $\sin\alpha_0$, où α_0 est l'angle $(\widehat{NO,NB})$ sur la Figure 2, à droite.

2. On considère à présent la spire carrée :
   (a) Faire une étude des symétries pour caractériser le champ magnétique $\vec{B}_{spire}$ créé par la spire en tout point M situé à l'altitude z de l'axe (Oz).
   (b) Utiliser l'expression de $\vec{B}_{fil}$ obtenue en 1(c) pour calculer le champ créé par le côté P_1P_2 de la spire au point O. On écrira d'abord ce que deviennent dans cette expression les quantités $\sin\alpha_0$ et ρ en fonction de la longueur a représentée sur la Figure 2 à gauche.
   (c) Utiliser l'expression de $\vec{B}_{fil}$ obtenue en 1(c) pour décrire le champ créé par le côté P_1P_2 de la spire au point M d'altitude $z \neq 0$. On écrira d'abord ce que deviennent dans cette expression les quantités $\sin\alpha_0$ et ρ en fonction de a et z de la Figure 2 à gauche.
   (d) A l'aide du principe de superposition des champs et de l'expression précédente, montrez que le champ créé par la spire carrée en tout point M de l'axe (Oz) est :

$$\vec{B}_{spire} = \frac{\mu_0 I a^2}{2\pi(z^2 + a^2/4)(z^2 + a^2/2)^{\frac{1}{2}}}\hat{z}.$$

   (e) Vérifier qu'en $z = 0$ on retrouve bien le résultat de la question 2(b).