Partiel

Mardi 10 mars 2009 (2h)

1. Une usine récupère 3 types d'alliages de récupération. Elle les fond, les mélange, et compose d'autres alliages. Les compositions des 3 alliages récupérés sont les suivantes :

type	fer	nickel	cuivre
alliage A	10%	20%	70%
alliage B	30%	40%	30%
alliage C	80%	10%	10%

L'usine a reçu une commande de 100 tonnes d'alliage contenant 34% de fer, 28% de nickel et 38% de cuivre. Combien de tonnes de chaque alliage récupéré faut-il mélanger pour satisfaire cette commande ? L'usine peut-elle fabriquer de cette manière un alliage contenant 69% de fer, 23% de nickel et 8% de cuivre ?

2. Soit

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer qu'il n'existe aucune matrice $M \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ telle que $BM = I_3$ mais qu'il existe une infinité de matrices $N \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $NB = I_2$, où $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont les matrices identité de $M_2(\mathbb{R})$ et $M_3(\mathbb{R})$.

3. Montrer que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible et calculer son inverse.

4. Pour tout réel t, on considère la matrice carrée d'ordre 4 suivante :

$$R(t) = \begin{pmatrix} e^t & 2te^t & (t^2-4t)e^t & 2+2(t-1)e^t \\ 0 & e^t & te^t & e^t - 1 \\ 0 & 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que pour tout réel t et tout réel s, on a $R(t)R(s) = R(t+s)$.
2. Soit t un réel. Montrer que la matrice $R(t)$ est inversible, et calculer son inverse.

$R(t) \cdot R(-t) = R(0)$ $\qquad R(0) = I$

$\hookrightarrow (R(t))^{-1} = R(-t)$

5. Soient a et b deux réels, et A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $rg(A) \geq 2$. Pour quelles valeurs de a et b a-t-on $rg(A) = 2$?

6. (a) Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 0 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 \end{vmatrix}.$$

(b) Soient $a,\ b,\ a',\ b' \in \mathbb{R}$. Montrer que le déterminant suivant vaut $(a'-a)^2(b'-b)^2$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & b & ab \\ 1 & a' & b & a'b \\ 1 & a & b' & ab' \\ 1 & a' & b' & a'b' \end{vmatrix}.$$

7. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & \alpha \\ \alpha & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Calculer $\det M$.

(b) Déterminer, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, le rang de M.