Université Nice Sophia Antipolis – 1ère année Licence SM-BIM 2008-09
Mathématiques

Examen - 11 mai 2009 (2h)

Les documents, les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.

1. On considère le système linéaire suivant

$$(S):\left\{\begin{array}{lllll} x & +y & +z & +3t & =0 \\ 2x & +3y & & +4t & =0 \\ 2x & +5y & -4z & & =0 \end{array}\right.$$

   (a) Résoudre le système (S).

   (b) Montrer que l'ensemble des solutions de (S) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, indiquer sa dimension et en donner une base.

2. Soient 5 vecteurs de $\mathbb{R}^4$:

$$v_1=(1,2,3,4),\ v_2=(2,2,2,6),\ v_3=(0,2,4,4),\ v_4=(1,0,-1,2) \text{ et } v_5=(2,3,0,1).$$

   Soient les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$:

$$F=Vect\{v_1,v_2,v_3\} \text{ et } G=Vect\{v_4,v_5\}.$$

   Déterminer une base de chacun des sous-espaces vectoriels F, G, $F\cap G$ et $F+G$, et leur dimension respective.
   (Indication : on pourra vérifier que $\dim(F+G)=\dim F+\dim G-\dim(F\cap G)$)

3. Soit $\mathcal{B}=\{e_1,e_2,e_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$. Soit φ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\left\{\begin{array}{lll} \varphi(e_1) & = & e_3 \\ \varphi(e_2) & = & -e_1+e_2+e_3 \\ \varphi(e_3) & = & e_3 \end{array}\right.$$

   (a) Ecrire l'image par φ du vecteur $v=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3$ de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Vérifier que la matrice A de φ dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (c) Déterminer son noyau. φ est-elle injective ?

   (d) Déterminer son image. φ est-elle surjective ?
   (Indication : on pourra utiliser la formule du rang).

   (e) On pose $f_1=e_1-e_3$, $f_2=e_1-e_2$ et $f_3=-e_1+e_2+e_3$. Exprimer e_1, e_2 et e_3 en fonction de f_1, f_2 et f_3.

   (f) Montrer que $\mathcal{B}'=\{f_1,f_2,f_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   (g) Calculer $\varphi(f_1)$, $\varphi(f_2)$ et $\varphi(f_3)$ en fonction de f_1, f_2 et f_3.
   Vérifier que la matrice B de φ dans la base $\mathcal{B}'$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(h) Donner la nature de φ.

(i) On pose

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que P est inversible, en calculant son déterminant, et calculer P^{-1}.

(j) Quelle relation lie A, B, P et P^{-1} ?

4. Soit Δ_n le déterminant de taille n suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta_{n+2} = 3\Delta_{n+1} - 2\Delta_n$ (avec la convention $\Delta_1 = 3$).

(b) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta_n = 2^{n+1} - 1$.