

Analyse SM1

Janvier 2011

(durée: 1h30, ni documents, ni calculatrice)

I Soit: $f(x) = x^3 \sin \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$, et $f(0) = 0$

1) f est-elle continue en 0? $\frac{1}{2} 3x^2$

2) f est-elle dérivable en 0?

II Calculez les limites suivantes:

1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x-2}$

2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + 2x - 12}{x^2 - 6x + 8}$

III Donner les développements limités en $x=0$

à l'ordre 3 de:

1) $\frac{x}{\cos x}$

2) $\exp\left(\frac{x}{\cos x}\right)$

Rappel: $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

IV Soit: $f(x) = x + \sqrt{x - \frac{1}{x+1}}$

$\frac{x^2 + x + 1}{x+1}$

1) Domaine de définition de f

2) Etude des branches infinies. Dessinez l'allure du graphe au voisinage des branches infinies

3) Tableau de variation

V Calculez les primitives suivantes:

I = $\int x^2 \sin x \, dx$

$12x^4 \quad 48$
 $48 \quad 36$

K = $\int \frac{e^{2x} - e^x}{e^{2x} - 1} \, dx$ (pose: $t = e^x$)

barème provisoire: 2 points par question.