Université de Nice Sophia-Antipolis
Licence première année - Analyse

Premier semestre 2010/11
SM1

Contrôle continu n° 1

Aucune calculatrice ni aucun document ne sont autorisés. Chaque résultat ou calcul devra être justifié. Un soin particulier sera apporté à la présentation. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1. (4 points)

a. Donner le domaine de définition de la fonction $h(x) = \sqrt{\ln\left(\frac{3x}{x^2-4}\right)}$.

b. Après avoir donné le domaine de dérivation, calculer la dérivée de la fonction h.

Exercice 2. (3 points)

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et dérivables en $a \in I$ avec $g'(a) \neq 0$.

a. Montrer que $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$.

b. Application: calculer la limite suivante: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cosh(x)-1}{\sinh(x)}$.

Exercice 3. (6 points)

On considère la fonction φ définie par $\varphi(t) = \arcsin(\sin(2t))$.

a. Donner l'ensemble de définition de φ.

b. Montrer que la fonction φ est impaire et périodique de période π.

c. Simplifier la fonction φ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

d. Donner l'allure de la courbe représentative de φ sur une période.

Exercice 4. (7 points)

On se propose d'étudier la fonction $f : x \mapsto \frac{(x-1)^2}{x} e^{\frac{1}{x}}$, définie sur $\mathbb{R}^*$.

a. Etudier les variations de f ainsi que ses limites en $-\infty, +\infty$ et 0^+.

b. Montrer que f admet une limite finie à gauche l en zéro, et on prolongera f par continuité à gauche en posant $f(0) = 0$.

c. La fonction f ainsi prolongée est-elle dérivable à gauche en zéro?

d. *Rappel: la courbe reprśentative d'une fonction f admet pour asymptote en $+\infty$ la droite d'équation $y = ax + b$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = b$.*

Montrer l'existence d'une asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$ et $-\infty$.

e. Représenter graphiquement f.