LICENCE DE MATHEMATIQUES | AUTOMNE 2010

ANALYSE 1

UNIVERSITE DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS

EXAMEN

Durée : 2 heures

Tous les documents et materiels électroniques sont interdits. Les questions marquées d'une * sont considérées comme étant plus difficiles. Le barème est indicatif.

Exercice 1 (Question de cours) [2 points] *Enoncer et démontrer la proposition sur la dérivabilité d'un produit de fonctions.*

Exercice 2 [1.5 points] *Calculer la dérivée des fonctions suivantes :*

$$f(x) = e^{\sin(x)}, \quad g(x) = x^2\cos(x^4), \quad h(x) = \frac{1}{1+e^x}.$$

Exercice 3 [2 points] *Calculer les intégrales suivantes :*

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}dx \text{ et } I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)dx.$$

Exercice 4 [3 points]

1. *Donner un développement limité à l'ordre 3 en* 0 *de la fonction* sin *et un développement limité à l'ordre 2 en* 0 *de la fonction* cos.
2. *Calculer la limite suivante :*

$$\lim_{x\to 0, x\neq 0} \frac{\sin(x) - x\cos(x)}{x^3}.$$

Exercice 5 [7 points] *Le but de cet exercice est d'étudier les fonctions hyperboliques. On définit les fonctions $sh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $ch : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en posant pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ et } ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

1. *Montrer que les fonctions sh et ch sont dérivables et calculer leurs dérivées.*

2. *Démontrer que*

$$(1) \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ ch(x)^2 - sh(x)^2 = 1.$$

3. (a) *Calculer les limites de la fonction sh en $+\infty$ et $-\infty$.*
   (b) *Montrer que sh est strictement croissante.*
   (c) *Montrer (soigneusement) que la fonction sh est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.*

4. *On note argsh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction réciproque de sh. Montrer que cette fonction est dérivable et calculer sa dérivée (on pourra utiliser la formule (1)).*

Exercice 6 [8 points] *Soit $\alpha > 0$ un réel et $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$.*

1. *Montrer que la fonction f est décroissante.*
2. *Calculer $I(A) = \int_1^A f(x)dx$ pour tout $A > 0$ (on pourra distinguer les cas $\alpha = 1$ et $\alpha \neq 1$).*
3. *Discuter selon la valeur de α l'existence et la valeur de $\lim_{A \to +\infty} I(A)$.*
4. *Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on note $S_N = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^\alpha}$. Montrer que la suite $(S_N)_N$ est strictement croissante.*
5. *
   (a) *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que*

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \frac{1}{k^\alpha}.$$

   (b) *En déduire que pour tout Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$S_N - 1 \leq I(N) \leq S_{N-1}$$

6. * *En utilisant l'inégalité ci-dessus, discuter selon les valeurs de α le comportement (existence d'une limite finie ou infinie) de S_N lorsque N tend vers l'infini.*

Mq $x \mapsto x^a$ est surjective
Mq $\forall y \in \mathbb{R}\ \exists x$ tq $g(x) = y$