Université Nice Sophia Antipolis – 1ère année Licence SM-BIM 2010-11
Mathématiques - Algèbre 1

Examen - 25 mai 2011 (2h)

Les documents, les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.
Justifiez toutes vos réponses

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et considérons A_α la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2\alpha \\ 1 & -1 & \alpha+1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & +2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Calculer le déterminant A_α en fonction de α.

   (b) Pour quelles valeurs de α, A_α est-elle inversible ?

   (c) Calculer l'inverse de A_1.

   (d) Calculer le rang de A_{-2}.

2. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par

$$f(x, y, z) = (2x + y + 5z, 3x + y + 7z, 2x - y + 3z, x + 2y + 4z).$$

   (a) Ecrire la matrice A de f dans les bases canoniques $\mathcal{B}_3$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}_4$ de $\mathbb{R}^4$ (on rappelle que $\mathcal{B}_3 = \{u_1 = (1,0,0), u_2 = (0,1,0), u_3 = (0,0,1)\}$ et $\mathcal{B}_4 = \{v_1 = (1,0,0,0), v_2 = (0,1,0,0), v_3 = (0,0,1,0), v_4 = (0,0,0,1)\}$).

   (b) Calculer le rang de la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(c) En déduire la dimension de l'image $\mathrm{Im} f$ de f.

(d) Montrer que les vecteurs v_1' et v_2' de $\mathbb{R}^4$ définis par $v_1' = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

forment une famille libre.

(e) Donner une base de $\mathrm{Im} f$.

(f) Vérifier que $\mathcal{B}_4' = \{v_1', v_2', v_3, v_4\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

(g) Quelle est la dimension de $\mathrm{Ker} f$? En donner une base.

Soit u_3' un vecteur de $\mathbb{R}^3$ défini par $u_3' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(h) Vérifier que $\mathcal{B}_3' = \{u_1, u_2, u_3'\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(i) Ecrire la matrice A' de f dans les bases $\mathcal{B}_3'$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}_4'$ de $\mathbb{R}^4$ (définies plus haut).

(j) Résoudre le système suivant

$$\begin{cases} 2x + y + 5z = 2 \\ 3x + y + 7z = 2 \\ 2x - y + 3z = -2 \\ x + 2y + 4z = 4 \end{cases}$$